1. x에 대한 항등식 $x^2-2x+3=a+b(x-1)+cx(x-1)$에서 a, b, c의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

▷ 정답 : $b=-1$

▷ 정답 : $c=1$

해설

계수비교법에 의하여

$x^2-2x+3=a+b(x-1)+cx(x-1)$

$\qquad\qquad\quad =cx^2+(b-c)x+a-b$

$x^2-2x+3=cx^2+(b-c)x+a-b$에서

$c=1, b-c=-2, a-b=3$

연립하여 풀면

$\therefore\ a=2,\ b=-1,\ c=1$

2. x에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0　② 16　③ 32　④ 64　⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(4x^2-3x+1)^5 = a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+\cdots+a_9x+a_{10}$과 같이 된다.
여기서 모든 계수들의 합
$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$을 구하려면
$x=1$을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5 = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5=32$

3. $f(x) = x^2 - ax + 1$이 $x - 1$로 나누어 떨어질 때 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

해설

$f(1) = 1^2 - a \cdot 1 + 1 = 0$

$\therefore\ a = 2$

4. x 에 대한 다항식 $4x^3 - 3x^2 + ax + b$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 갖도록 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -37

해설

$P(x) = 4x^3 - 3x^2 + ax + b$ 라 하고 $P(x)$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 가지려면

$P(-1) = P(3) = 0$

$P(-1) = -4 - 3 - a + b = 0 \;\therefore\; a - b = -7$

$P(3) = 108 - 27 + 3a + b = 0 \;\therefore\; 3a + b = -81$

$\therefore\; a = -22,\; b = -15$

5. 다음 중 다항식 $a^3-a^2b+ab^2+ac^2-b^3-bc^2$ 의 인수인 것은?

① $a+c$　② $a-b^2$　③ $a^2-b^2+c^2$
④ $a^2+b^2+c^2$　⑤ $a^2+b^2-c^2$

해설

$a^3-a^2b+ab^2+ac^2-b^3-bc^2$
$=a^3-b^3+(a-b)c^2-ab(a-b)$
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)+(a-b)c^2-ab(a-b)$
$=(a-b)(a^2+ab+b^2+c^2-ab)$
$=(a-b)(a^2+b^2+c^2)$

6. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

㉠ $z \cdot \bar{z}$는 실수이다.

㉡ $z + \bar{z}$는 실수이다.

㉢ $z - \bar{z}$는 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1)$은 실수이다.

① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉣　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

㉠ $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ (실수)

㉡ $z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$ (실수)

㉢ $z - \bar{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi$

$b = 0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1) = (a+bi+1)(a-bi+1)$

$$= (a+1+bi)(a+1-bi)$$

$$= (a+1)^2 + b^2 \text{ (실수)}$$

7. 이차방정식 $x^2+2x+2-a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a 의 범위를 구하면?

① $a<1$　　② $a \geq 1$　　③ $-1<a<1$
④ $a>1$　　⑤ $a \geq -1$

해설
$x^2+2x+2-a=0$ 이
서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는
판별식 $D>0$ 이어야 한다.
$\frac{D}{4}=1-(2-a)>0$
$1-2+a>0$
$\therefore\ a>1$

8. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 10$ 의 최댓값을 M , $y = 3x^2 + 6x - 5$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$y = -x^2 + 2x + 10$
$= -(x-1)^2 + 11,\ M = 11$
$y = 3x^2 + 6x - 5$
$= 3(x+1)^2 - 8,\ m = -8$
$\therefore M + m = 11 - 8 = 3$

9. 다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, $f(x)$를 $2x-1$으로 나눌 때의 몫과 나머지는?

① 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$
② 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : R
③ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$
④ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : R
⑤ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $2R$

해설

$x-\frac{1}{2}$에 2를 곱하면 $2x-1$

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R=(2x-1)\frac{1}{2}Q(x)+R$$

10. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(x+1)(y+1)(z+1)$
$=xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$
$=7$

11. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에 대입하면

$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

$\frac{1}{4}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

따라서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$

12. $3x^3 - 5x + 2 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a+b+c+d$ 의 값은?

① -16 ② 16 ③ 20 ④ 23 ⑤ 25

해설

$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d = (x-1)\left\{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\right\} + d$
$= (x-1)\,(x-1)[a(x-1)+b] + c\} + d$ 이므로
조립제법을 쓰면

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & 3 & 0 & -5 & 2 & & \\
 & & 3 & 3 & -2 & & \\
\hline
1 & 3 & 3 & -2 & \boxed{0} & \leftarrow & \mathrm{d} \\
 & & 3 & 6 & & & \\
\hline
1 & 3 & 6 & \boxed{4} & \leftarrow & \mathrm{c} & \\
 & & 3 & & & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{9} & \leftarrow \mathrm{b} & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & & &
\end{array}
$$

$a+b+c+d = 3+9+4+0 = 16$

해설

이 문제의 경우 계수의 합을 구하는 것이므로 양변에 $x = 2$ 를 대입해서 한꺼번에 구하는 값을 얻을 수 있다.

13. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \text{ (단. } a \neq b \neq c)$$

① -1 ② 1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1\end{aligned}$$

14. 두 다항식 x^3+2x^2-x-2,
$(x-1)(3x^2+ax+2a)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-3$

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+2)(x+1)$
$\therefore 3x^2+ax+2a$는
$x+2$ 또는 $x+1$을 인수로 가져야 한다.
$f(x)=3x^2+ax+2a$로 놓을 때
$x+2$가 인수이면 $f(-2)=12-2a+2a=12$가 되어 적합하지 않다.
$\therefore x+1$를 인수로 갖는다.
$x+1$이 인수이면 $f(-1)=3-a+2a=3+a=0$
$\therefore a=-3$

15. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2-8$이고, 최소공배수가 x^3-2x^2-5x+6일 때, 두 다항식의 최대공약수는 $ax+b$이다. 이 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

두 식 A, B의 최대공약수를 G라 하면
$A=Ga, B=Gb$(a, b는 서로소)
$A+B=(a+b)G=2(x+2)(x-2)$
$L=abG=(x-1)(x-3)(x+2)$
$\therefore\ G=x+2$

16. x 에 대한 방정식 $ax^2+2x-a-2=0$의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)

① 오직 한 실근을 갖는다.

② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 실근을 갖는다.

⑤ 허근을 갖는다.

해설

(i) $a=0$ 일 때 : $x=\frac{a+2}{2}$

(ii) $a\neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.

$D'=1+a(a+2)=a^2+2a+1=(a+1)^2\geq 0$

$\therefore$ 주어진 방정식은 실근을 갖는다

17. x에 대한 다항식 $(x^2-2x)^2+3(x^2-2x)-4$를 계수가 실수인 범위에서 인수분해 하였을 때, 모든 인수들의 합은?

① x^2-2 ② x^2+2

③ $x^2-4x+2\sqrt{2}-4$ ④ $x^2+4x+2\sqrt{2}$

⑤ $4x-4$

해설

$x^2-2x=t$ 로 치환할 때,
t^2+3t-4
$=(t+4)(t-1)$
$=(x^2-2x+4)(x^2-2x-1)$
$=(x^2-2x+4)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$
$(\because\ x^2-2x+4$ 의 $\frac{D}{4})$
인수의 합은
$(x^2-2x+4)+(x-1-\sqrt{2})+(x-1+\sqrt{2})=x^2+2$

18. 다항식 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누면 $3x+2$가 남고, 그 몫을 $x-1$로 나누면 2가 남는다. 이 다항식 $f(x)$를 x^3-1로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $\frac{1}{2}R(2)$의 값을 구하면?

① 41　② 31　③ 21　④ 11　⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+x+1)Q(x)+3x+2 \\ &= (x^2+x+1)\{(x-1)p(x)+2\}+3x+2 \\ &= (x^3-1)p(x)+2x^2+5x+4 \end{aligned}$$

$\therefore R(x) = 2x^2+5x+4$

$\therefore \frac{1}{2}R(2) = 11$

19. $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다.
$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$을 간단히 하면?

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $2+i$
④ $2-i$ ⑤ $\sqrt{3}+i$

해설

$\alpha = a + bi,\ \alpha^t = b + ai$이므로
$\alpha\alpha^t = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$
그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a + bi$에서
$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2} \qquad \therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\right)i = i$
$\therefore$ (준식)$= 2\alpha(\alpha \cdot \alpha^t)^4 = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} \cdot i^4 = \sqrt{3}+i$

20. 복소수 $z = a + bi$ $(a, b$: 실수$)$에 대하여 $< z >= b + ai$로 나타낸다.
$z = \dfrac{4+3i}{5}$ 일 때, $5z^5 < z >^4$ 의 값을 구하면?

① $3+4i$ ② $4+3i$ ③ $5+4i$
④ $5+3i$ ⑤ $4+5i$

해설

$z < z >= (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$

$z = \dfrac{4+3i}{5}$ 이므로

$z < z >= \left\{ \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 \right\} i = i$

$$\begin{aligned} \therefore\ 5z^5 < z >^4 &= 5z(z < z >)^4 \\ &= 5\left(\frac{4+3i}{5}\right)(i)^4 \\ &= 4+3i \end{aligned}$$

21. x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^2 + \overline{\omega}^2 = 16$이다. 실수 k의 값은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$ 이 허근을 가지므로

$\frac{D}{4} = k^2 - 6k < 0,\ \ k(k-6) < 0$

$\therefore\ 0 < k < 6$

한편, ω 가 허근이고 계수가 실수이므로 주어진 이차방정식의 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$\omega + \overline{\omega} = -2k,\ \omega\overline{\omega} = 6k$이므로

$\omega^2 + \overline{\omega}^2 = (\omega + \overline{\omega})^2 - 2\omega\overline{\omega} = (-2k)^2 - 12k$

$= 4k^2 - 12k$

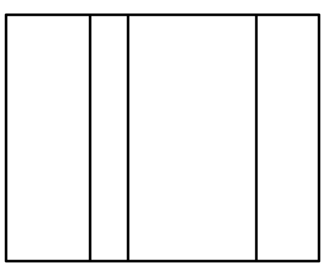
$4k^2 - 12k = 16,$

즉, $k^2 - 3k - 4 = 0$ 에서

$(k+1)(k-4) = 0 \qquad \therefore\ k = -1$ 또는 $k = 4$

$0 < k < 6$ 이므로 $k = 4$

22. 어떤 농부가 길이 700m 의 철망을 가지고 그림과 같은 모양의 가축우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이를 최대로 하는 바깥 직사각형의 가로, 세로의 길이 중 짧은 것은 몇 m 인가?



① 60m ② 70m ③ 80m ④ 90m ⑤ 100m

해설

세로의 길이를 x 라 하면 세로가 5 개 있으므로 필요한 길이는 $5x$,

가로의 길이는 $\frac{1}{2}(700-5x)$ 이다. 전체 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(700-5x)\cdot x \\ &= -\frac{5}{2}x^2+350x \\ &= -\frac{5}{2}(x^2-140x+70^2-70^2) \\ &= -\frac{5}{2}(x-70)^2+12250 \end{aligned}$$

따라서 넓이는 세로가 70m , 가로가 175m 일 때 최대이다.

23. 양수 x에 대하여 $[x] = n$이라 할 때, $x^2 + (x-n)^2 = 20$이다. 이 때, $2x - n$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① $\sqrt{6}$　② $2\sqrt{6}$　③ $\sqrt{5}$　④ $2\sqrt{5}$　⑤ $\sqrt{10}$

해설

$x - n = \alpha$라 하면 $0 \le \alpha < 1$
$x^2 = 20 - \alpha^2$에서 $19 < x^2 \le 20$
즉, $\sqrt{19} < x \le \sqrt{20}$이므로 $[x] = n = 4$이다.
따라서, 주어진 식은 $x^2 + (x-4)^2 = 20$이 되고,
식을 정리하면 $x^2 - 4x - 2 = 0$
$\therefore\ x = 2 + \sqrt{6}(\because x > 0)$
$\therefore\ 2x - n = 4 + 2\sqrt{6} - 4 = 2\sqrt{6}$

24. $m > 0$이고 이차방정식 $mx^2 + (3m-5)x - 24 = 0$의 두 근의 절대값의 비가 $3:2$일 때, 정수가 아닌 m의 값은?

① $\frac{25}{9}$ ② $\frac{26}{9}$ ③ $\frac{28}{9}$ ④ $\frac{29}{9}$ ⑤ $\frac{31}{9}$

해설

$m > 0$에서 두 근의 곱이 $-\frac{24}{m} < 0$이므로

서로 다른 부호의 두 실근을 갖는다.

따라서, 방정식의 두 근을 $3\alpha,\ -2\alpha$라 놓을 수 있다.

근과 계수와의 관계로부터

$$\begin{cases} 3a + (-2\alpha) = -\frac{3m-5}{m} \\ 3\alpha(-2\alpha) = -\frac{24}{m} \end{cases}$$

$\therefore\ \left(-\frac{3m-5}{m}\right)^2 = \frac{4}{m}$ $\quad\therefore\ (3m-5)^2 = 4m$

정리하여 인수분해하면 $(9m-25)(m-1) = 0$

$\therefore\ m = \frac{25}{9},\ 1$

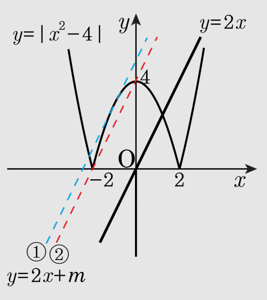
따라서 정수가 아닌 m의 값은 $\frac{25}{9}$ 이다.

25. x에 대한 방정식 $|x^2-4|=2x+m$이 서로 다른 4개의 실근을 가질 때, 실수 m의 값 또는 m의 값의 범위는?

① $-4<m<4$　② $m=-4$
③ $m=4$ 또는 $m=5$　④ $4<m<5$
⑤ $m>5$

해설

$y=|x^2-4|$와 $y=2x+m$을 그래프로 나타내면



서로 다른 4개의 실근을 가지는 경우는 ①, ②번 그래프와 같다.

① $-x^2+4=y$와 $2x+m=y$이 접하는 경우
$-x^2+4=2x+m$
$x^2+2x+m-4=0$
$\dfrac{D}{4}=1-m+4=0$
$\therefore\ m=5$
② $y=2x+m$이 $(-2,\ 0)$을 지나는 경우
$0=-4+m$
$\therefore\ m=4$
구하는 식은 ①, ②번 그래프 사이이므로
$\therefore\ 4<m<5$