1. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $i^4 = -1$

② $x^2 = -9$ 를 만족하는 실수는 존재하지 않는다.

③ $\sqrt{-27} = 3\sqrt{3}i$

④ $2 \in \{x \mid x\text{는 복소수}\}$

⑤ $a + bi$ 에서 $a = 0$ 이고 $b \neq 0$ 이면 순허수이다.(단, a, b 는 실수)

해설

$i^2 = -1 \quad \rightarrow \quad i^4 = 1$

2. 복소수 $\frac{3+i}{1+i}+\frac{a-i}{1-i}$ 가 실수가 되도록 하는 실수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{3+i}{1+i}+\frac{a-i}{1-i}=\frac{(3+i)(1-i)+(1+i)(a-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{4-2i+(a+1)+(a-1)i}{2}$$
$$=\frac{a+5+(a-3)i}{2}$$

위의 식이 실수가 되려면 허수 부분이 0이어야 하므로 $a-3=0$

$\therefore\ a=3$

3. $(x-2)+3yi=0$를 만족하는 실수 $x,\ y$의 합을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x-2=0,\ 3y=0$

$x=2,\ y=0 \rightarrow x+y=2$

4. $\dfrac{2-\sqrt{-5}}{2+\sqrt{-5}}$ 를 간단히 하면?

① $-\dfrac{1}{9}-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}i$ ② $\dfrac{1}{9}+\dfrac{4\sqrt{5}}{9}i$ ③ $1-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}i$
④ $1+4\sqrt{5}i$ ⑤ $-1-4\sqrt{5}i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{-5}}{2+\sqrt{-5}} &= \frac{2-\sqrt{5}i}{2+\sqrt{5}i}\times\frac{2-\sqrt{5}i}{2-\sqrt{5}i}\\ &= \frac{4-4\sqrt{5}i-5}{4+5}\\ &= -\frac{1}{9}-\frac{4\sqrt{5}}{9}i\end{aligned}$$

5. $\dfrac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4}$ 의 값은?

① i ② $-i$ ③ $-\dfrac{i}{2}$ ④ $\dfrac{1-i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1+i}{2}$

해설

$$\frac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4}=\frac{1+(-i)+(-1)}{1+(-1)+1}=\frac{-i}{1}=-i$$

6. $x = 1 - \sqrt{3}i$ 일 때, $x^2 - 2x + 1$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x = 1 - \sqrt{3}i$ 에서
$x - 1 = -\sqrt{3}i$ 의 양변을 제곱하면
$(x-1)^2 = (-\sqrt{3}i)^2$
$x^2 - 2x = -4$ 이므로
$x^2 - 2x + 1 = -4 + 1 = -3$

7. $z=\dfrac{1+3i}{1-i}$ 일 때, 다음 중 z 의 켤레복소수 $\overline{z}$ 와 같은 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $\dfrac{1+3i}{1+i}$ ② $\dfrac{1-3i}{1+i}$ ③ $\dfrac{1-3i}{1-i}$

④ $\dfrac{1-i}{1+3i}$ ⑤ $\dfrac{1+i}{1-3i}$

해설

$\overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)}=\dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$ 이므로

$\overline{z}=\overline{\left(\dfrac{1+3i}{1-i}\right)}=\dfrac{\overline{1+3i}}{\overline{1-i}}=\dfrac{1-3i}{1+i}$

8. $x = 3 + 2i$ 일 때, $x^2 - 6x - 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -23

해설

$x = 3 + 2i$ 에서 $x - 3 = 2i$ 의 양변을 제곱하면

$(x - 3)^2 = (2i)^2$ $\quad \therefore\ x^2 - 6x = -13$

$x^2 - 6x - 10 = -13 - 10 = -23$

$\therefore\ -23$

9. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a \geq 0,\ b < 0$　② $a > 0,\ b > 0$　③ $a \geq 0,\ b > 0$

④ $a < 0,\ b < 0$　⑤ $a \leq 0,\ b < 0$

해설

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 가 성립할 조건은 $b < 0$ 이고 $a \geq 0$ 일 때이다.

10. 복소수 $z=(2+i)a^2+(1+4i)a+2(2i-3)$ 이 순허수일 때, 실수 a 의 값은?

① -2 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$z=(2a^2+a-6)+(a^2+4a+4)i$

순허수이므로 $2a^2+a-6=0$

$\Rightarrow\ (a+2)(2a-3)=0$

$\Leftrightarrow\ a=-2$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

그런데 $a=2$ 이면,

$a^2+4a+4=0$ 이 되어 순허수가 성립되지 않는다.

$\therefore\ a=\frac{3}{2}$

11. 실수 x, y에 대하여, 등식 $2x+y+(x-3y)i=3+2i$가 성립할 때, $\frac{x}{y}$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{11}$　② 11　③ 7　④ -7　⑤ -11

해설

$2x+y=3,\ x-3y=2$ 이므로

$x=\frac{11}{7}$, $y=-\frac{1}{7}$

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{11}{7}\times-\frac{7}{1}=-11$

12. x, y가 실수일 때, $(1+i)x+(1-i)y = \dfrac{2-i}{1+i}$ 을 만족하는 x, y 의 값은?

① $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=1$ ② $x=\dfrac{1}{2}$, $y=1$ ③ $x=1$, $y=-\dfrac{1}{2}$
④ $x=1$, $y=1$ ⑤ $x=1$, $y=\dfrac{1}{2}$

해설

$(x+y)+(x-y)i=\dfrac{2-i}{1+i}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$

$\Rightarrow\ x+y=\dfrac{1}{2},\ \ x-y=-\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow\ x=-\dfrac{1}{2},\ \ y=1$

13. 등식 $3x-2yi=(2+i)^2$이 성립하는 x, y에 대하여 두 수를 곱하면?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$3x-2yi=(2+i)^2=3+4i$

$x=1$, $y=-2$

$\therefore\ xy=-2$

14. $a,\ b$가 실수일 때, $(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$을 만족하는 $a,\ b$의 값의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$에서
$(3a-3)+(4a-5b+6)i=0$
$a,\ b$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $3a-3=0,\ 4a-5b+6=0$
$\therefore\ a=1,\ b=2$
따라서 $a+b=3$ 이다.

15. $\frac{a}{1-i}+\frac{b}{1+i}=5$를 만족하는 두 실수 $a,\ b$에 대하여 곱 ab의 값을 구하면?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

$\frac{a(1+i)}{2}+\frac{b(1-i)}{2}=5$
$a(1+i)+b(1-i)=10,$
$(a+b)+(a-b)i=10$
$a+b=10,\ a-b=0$
$2a=10,\ a=5,\ b=5,\ ab=25$

16. $x=1+2i$, $y=\dfrac{1+2i}{1-i}$, $z=\dfrac{1-2i}{1-i}$ 일 때, $xy+xz$ 의 값을 구하면?

① $-1+3i$ ② $-1-2i$ ③ $-1+2i$
④ $-1-i$ ⑤ $-1+i$

해설

$x=1+2i$, $y=\dfrac{1+2i}{1-i}$, $z=\dfrac{1-2i}{1-i}$

$$\begin{aligned}\therefore\ xy+xz &= \frac{(1+2i)^2}{1-i}+\frac{(1-2i)(1+2i)}{1-i}\\ &= \frac{-3+4i+5}{1-i}\\ &= \frac{2+4i}{1-i}\\ &= -1+3i\end{aligned}$$

17. $\dfrac{2-i}{2+i}+\dfrac{2+i}{2-i}$ 를 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① $\dfrac{6}{5}$　② 2　③ $\dfrac{8}{5}$　④ $\dfrac{8}{3}$　⑤ 3

해설

$$\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2-i)^2+(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}$$
$$=\frac{3+3}{5}=\frac{6}{5}$$

18. $z = \dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^2 - 2z + 3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ -1

해설

$z = \dfrac{2}{1+i} = 1 - i$

$z^2 - 2z + 3 = (1-i)^2 - 2(1-i) + 3 = 1$

19. 복소수 z의 켤레복소수 $\bar{z}$라 할 때 $(1+2i)z+3(2-\bar{z})=0$을 만족하는 복소수 z를 구하면?

① $z=2-3i$ ② $z=4-3i$ ③ $z=6-3i$
④ $z=2+3i$ ⑤ $z=4+3i$

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$라 하면
(준식) $=(1+2i)(a+bi)+3(2-a+bi)$
$=(6-2a-2b)+(2a+4b)i$
$\therefore 6-2a-2b=0, 2a+4b=0$
$\therefore a=6, b=-3$
$\therefore z=6-3i$

20. $x = -2 - i$ 일 때, $x^2 + 4x + 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x = -2 - i$ 에서 $x + 2 = -i$ 의 양변을 제곱하면
$(x + 2)^2 = (-i)^2$ 이므로
$x^2 + 4x = -5$
$\therefore\ x^2 + 4x + 10 = -5 + 10 = 5$

21. 실수가 아닌 복소수 z 에 대하여 $\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이기 위한 조건은?
(단, $z \neq \pm i$ 이고 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $z \cdot \bar{z} = 1$ ② $z + \bar{z} = 0$
③ $z + \bar{z} = 1$ ④ $z + \bar{z} = -1$
⑤ $(z+1)(\bar{z}+1) = 1$

해설

$\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이면

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$$\frac{z}{1+z^2} - \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2} = 0$$

$$\frac{z(1+\bar{z}^2) - \bar{z}(1+z^2)}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z}) - z\bar{z}(z-\bar{z})}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z})(1-z\bar{z})}{(1+z)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

(분모)$\neq 0$ 이므로

(분자)$= (z-\bar{z})(1-z\bar{z}) = 0$

z 가 실수가 아니므로 $z \neq \bar{z}$

$\therefore z\bar{z} = 1$

22. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{30}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{2i}{2}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=\frac{-2i}{2}=-i$

$f(i)=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{30}=(-i)^{30}=(i^4)^7 i^2$

$=-1 f(-i)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{30}=i^{30}$

$=(i^4)^7 i^2=-1$

$\therefore f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$

$=f(i)+f(-i)=-1-1=-2$

23. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2005}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$ 의 값을 구하면?

① 0 ② i ③ 1 ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$\frac{1+i}{1-i}=i,\ \frac{1-i}{1+i}=-i$

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2005}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$

$=i^{2005}+(-i)^{2005}$

$=(i^4)^{501}\cdot i+((-i)^4)^{501}\cdot(-i)$

$=i+(-i)=0$

24. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2004}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$ 를 간단히 하면?

① $-2i$ ② $2i$ ③ $1+i$ ④ $1-i$ ⑤ i

해설

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=i$, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)=-i$ 이고 $i^4=1$

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2004}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$

$=i^{2004}+(-i)^{2005}$

$=i^{4\times501}+(-i)^{4\times501}\times(-i)$

$=1+(-i)$

$=1-i$

25. 2010개의 정수 $a_1,\ a_2, \cdots a_{2010}$ 은 모두 -1 또는 1 이고, $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2010} = -1$ 이다. 이 때, $x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2009}} \cdot \sqrt{a_{2010}}$ 을 만족하는 x 의 값은?

① i　② $-i$　③ $i,\ -i$　④ -1　⑤ $-1, 1$

해설

$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2010} = -1$ 이므로

$a_1,\ a_2, \cdots a_{2010}$ 중에는 -1 이 홀수 개가 있다.

(i) -1 이 $4k+1$ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) 개일 때

$x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2010}} = i^{4k+1} = i$

(ii) -1 이 $4k+3$ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) 개일 때

$x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2010}} = i^{4k+3} = -i$

따라서 만족하는 x 의 값은 $i,\ -i$ 이다.

26. $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}i}{2}$ 에 대하여 복소수 $w=\frac{z+1}{3z-2}$ 일 때, $w\overline{w}$ 의 값을 구하면?

① 1　　② $\frac{1}{2}$　　③ $\frac{1}{3}$　　④ $\frac{1}{4}$　　⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$z+\overline{z}=1,\ z\overline{z}=2$

$$\begin{aligned} w\overline{w} &= \frac{z+1}{3z-2}\times\frac{\overline{z}+1}{3\overline{z}-2} \\ &= \frac{z\overline{z}+(z+\overline{z})+1}{9z\overline{z}-6(z+\overline{z})+4} \\ &= \frac{2+1+1}{18-6+4} \\ &= \frac{4}{16} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

27. $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다. $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$ 을 간단히 하면?

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $2+i$
④ $2-i$ ⑤ $\sqrt{3}+i$

해설

$\alpha = a+bi,\ \alpha^t = b+ai$이므로
$\alpha\alpha^t = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$
그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a+bi$에서
$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2} \qquad \therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\right)i = i$
$\therefore$ (준식)$= 2\alpha(\alpha\cdot\alpha^t)^4 = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\cdot i^4 = \sqrt{3}+i$

28. 복소수 z 에 대하여 $f(z) = z\bar{z}$ ($\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (w 는 복소수)

보기

ㄱ $f(z) \geqq 0$

ㄴ $f(z+w) = f(z) + f(w)$

ㄷ $f(zw) = f(z)f(w)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

해설

ㄱ $z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수)라 하면
$f(z) = z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geqq 0$
ㄴ $f(z+w) = (z+w) \cdot (\overline{z+w}) = (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w})$
$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$
$\neq z\bar{z} + w\bar{w} = f(z) + f(w)$
ㄷ $f(zw) = zw \cdot (\overline{zw}) = zw \cdot \bar{z}\ \bar{w}$
$= z\bar{z} \cdot w\bar{w} = f(z)f(w)$

29. 양의 실수 a, b에 대하여 다음 복소수 중 $z = a(1+i) + b(1-i)$ (i는 허수단위) 의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $-3+i$　　② $2+3i$　　③ $5-2i$

④ $1-3i$　　⑤ $-4-2i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i \in A \ (a > 0,\ b > 0)$

① $a+b=-3,\ a-b=1$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2$ (부적당)

② $a+b=2,\ a-b=3$

$\therefore\ a=\frac{5}{2},\ b=-\frac{1}{2}$ (부적당)

③ $a+b=5,\ a-b=-2$

$\therefore\ a=\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{2}$ (양의 실수)

④ $a+b=1,\ a-b=-3$

$\therefore\ a=-1,\ b=2$ (부적당)

⑤ $a+b=-4,\ a-b=-2$

$\therefore\ a=-3,\ b=-1$ (부적당)

30. $w=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 일 때, $(w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$w=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ w^2+w+1=0,\quad w^3=1$

$\therefore\ (w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$

$=(w-2w-2)^2+(2w-w-1)^2$

$=(-w-2)^2+(w-1)^2$

$=w^2+4w+4+w^2-2w+1$

$=2w^2+2w+5$

$=2(w^2+w+1)+3$

$=3$