1. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ 내림차순으로 정리하면 $3yx^3+(9y-z)x+5y-4$ 이다. ㉡ 오름차순으로 정리하면 $5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다. ㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다. ㉣ x^3 의 계수는 3이다. ㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢

② ㉠, ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

2. 등식 $x^2-2x+3=a+b(x-1)+c(x-1)^2$ 이 x에 관한 항등식일 때, $a^2+b^2+c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2-2x+3=a+b(x-1)+c(x-1)^2$

$x=1$을 대입하면 $2=a$ ······①

$x=0$을 대입하면 $3=a-b+c$ ······②

$x=2$를 대입하면 $3=a+b+c$ ······③

①을 ②, ③에 대입하여 정리하면

$b-c=-1$, $b+c=1$

두 식을 연립하면 $b=0$, $c=1$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=4+0+1=5$

3. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x+a)(x+b)(x+c)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & 4 & 1 & -6 \\
 & & 1 & 5 & 6 \\
\hline
-2 & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \\
 & & -2 & -6 & \\
\hline
-3 & 1 & 3 & \boxed{0} & \\
 & & -3 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & & \\
\end{array}
$$

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$

$\therefore a+b+c = 4$

4. x에 대한 이차방정식 $kx^2+2(k+1)x+k=0$이 중근을 가질 때 k의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ -1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$\frac{D}{4}=b'^2-ac=(k+1)^2-k^2=2k+1$에서

중근을 가질 조건이므로

$\frac{D}{4}=0$이어야 한다.

$2k+1=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$

5. 이차함수 $y = -(x-1)(x+3)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned} y &= -(x-1)(x+3) \\ &= -x^2 - 2x + 3 \\ &= -(x+1)^2 + 4 \end{aligned}$$

$x = -1$ 일 때, 최댓값 4 를 가진다.

6. 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 나머지를 $r(x)$라 할 때, $f(x)-g(x)-2r(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$　② $-r(x)$　③ 0

④ $r(x)$　⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=g(x)Q(x)+r(x)$

$\therefore f(x)-g(x)-2r(x)$

$=g(x)Q(x)+r(x)-g(x)-2r(x)$

$=g(x)\{Q(x)-1\}-r(x)$

여기서 $g(x)$의 차수는 $-r(x)$의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$이다.

7. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

준 식은 $(a-b)^3$ 이다.

$a - b = 2004 - 2001 = 3$

$\therefore\ (a-b)^3 = 3^3 = 27$

8. 등식 $(2k+1)y-(k+3)x+10=0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

(준식)$=(y-3x+10)+(2y-x)k=0$

$\therefore 2y=x,\ \ y-3x=-10$

$\therefore x=4,\ \ y=2$

$\therefore x+y=6$

9. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 $(x-1)^2$을 나누었을 때 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로

x^3+ax^2+bx+3

$=(x-1)^2(x+k)+2x+1$

$=x^3+(k-2)x^2+(3-2k)x+k+1$

양변의 계수를 비교하면

$a=k-2,\ b=3-2k,\ 3=k+1$

$k=2$이므로 $a=0,\ b=-1$

$\therefore\ a-b=0-(-1)=1$

10. x에 관한 항등식 $(x^2+x+1)^5 = a_{10}(x+1)^{10}+a_9(x+1)^9+\cdots+a_1(x+1)+a_0$에서 $a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

주어진 식에 $x=0$을 대입하면

$(0+0+1)^5 = a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$

$\therefore\ a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}=1$

11. 다항식 $f(x)$를 $x-2,\ x-3$ 으로 나눌 때의 나머지가 각각 $3, 7$이라고 할 때, $f(x)$를 $(x-2)(x-3)$으로 나눌 때의 나머지는?

① $2x+3$　② $3x-4$　③ $4x-5$

④ $5x+6$　⑤ $6x-7$

해설

$f(x)=(x-2)\,Q_1(x)+3,\ f(2)=3$

$f(x)=(x-3)\,Q_2(x)+7,\ f(3)=7$

$f(x)=(x-2)(x-3)\,Q_3(x)+ax+b$

$f(2)=2a+b=3, f(3)=3a+b=7$ 이다.

연립하면 $a=4,\ b=-5$

$\therefore$ 나머지는 $4x-5$

12. 다항식 $2x^{30}+2x^{28}-x$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$2x^{30}+2x^{28}-x=(x+1)\,Q\,(x)+R$

양변에 $x=-1$을 대입 하면,

$2+2+1=R \therefore\ R=5$

양변에 $x=1$을 대입 하면,

$2+2-1=2Q\,(1)+5$

$\therefore\ Q\,(1)=-1$

13. x에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$
\begin{array}{c|cccc}
k & 1 & a & -1 & b \\
 & & c & d & a \\
\hline
 & 1 & 4 & 3 & \boxed{5}
\end{array}
$$

① $a=3$　② $b=2$　③ $c=1$

④ $d=4$　⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & a & -1 & b \\
 & & 1 & a+1 & a \\
\hline
 & 1 & a+1 & a & \boxed{b+a}
\end{array}
$$

$k=1,\ a=3,\ b=2,\ c=1,\ d=4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

14. 등식 $3x^3 - x + 2 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 x 에 관한 항등식이 되도록 상수 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 값을 정하면?

① $a = 3\ b = 7$, $c = -4$, $d = 4$

② $a = 3\ b = 9$, $c = 8$, $d = 4$

③ $a = 2\ b = 9$, $c = 6$, $d = 4$

④ $a = 1\ b = 3$, $c = 8$, $d = 4$

⑤ $a = 2\ b = -9$, $c = 6$, $d = 4$

해설

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & 3 & 0 & -1 & 2 & & \\
 & & 3 & 3 & 2 & & \\
\hline
1 & 3 & 3 & 2 & \boxed{4} & \leftarrow & \mathrm{d} \\
 & & 3 & 6 & & & \\
\hline
1 & 3 & 6 & \boxed{8} & \leftarrow & \mathrm{c} & \\
 & & 3 & & & & \\
\hline
 & 3 & \boxed{9} & \leftarrow \mathrm{b} & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ a = 3,\ b = 9,\ c = 8,\ d = 4$

해설

(i) $x - 1 = y$ 로 놓으면 $x = y + 1$ 이므로

$3(y+1)^3 - (y+1) + 2 = ay^3 + by^2 + cy + d$

$\therefore\ 3y^3 + 9y^2 + 8y + 4 = ay^3 + by^2 + cy + d$

$\therefore\ a = 3$, $b = 9$, $c = 8$, $d = 4$

(ii) x 대신 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 를 대입하면,

$x = 0$ 대입 : $2 = -a + b - c + d \cdots$ ①

$x = -1$ 대입 : $0 = -8a + 4b - 2c + d \cdots$ ②

$x = 1$ 대입 : $4 = d\ \ \cdots\cdots$ ③

$x = 2$ 대입 : $24 = a + b + c + d \cdots$ ④

①, ②, ③, ④를 연립하여 풀면,

$\therefore\ a = 3,\ b = 9,\ c = 8,\ d = 4$

15. $x^4+2x^2+9=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$로 인수분해될 때, $|ab-cd|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$(\text{준식}) = (x^2+3)^2-(2x)^2$$
$$= (x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$$

여기서 계수를 비교하면

$a=2,\ b=3,\ c=-2,\ d=3$

$\therefore |ab-cd| = |2\times3-(-2)\times3| = 12$

16. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 $z-\bar{z}=2i$, $\dfrac{\bar{z}}{z}=-i$ 가 성립할 때, $z\cdot\bar{z}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 5 ④ 8 ⑤ 13

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$

$z-\bar{z}=2i$ 에서 $a+bi-(a-bi)=2i$, $2bi=2i$

$\therefore\ b=1$

$\dfrac{\bar{z}}{z}=-i$ 에서 $\dfrac{a-i}{a+i}=-i$

$\dfrac{(a-i)^2}{a^2+1}=-i$, $\dfrac{a^2-1-2ai}{a^2+1}=-i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

(i) 실수부분이 0 이어야 하므로

$$\frac{a^2-1}{a^2+1}=0\ ,\ a^2-1=0$$

$\therefore a=\pm1 \quad \cdots$ ㉠

(ii) 허수부분이 -1 이어야 하므로

$$\frac{-2a}{a^2+1}=-1\ ,\ a^2+1=2a$$

$$a^2-2a+1=0\ ,\ (a-1)^2=0$$

$\therefore a=1 \quad \cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $a=1$

$\therefore\ z\cdot\bar{z}=(1+i)(1-i)=1+1=2$

17. 다음을 계산하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

$$\sqrt{3}\sqrt{-3}+\sqrt{-3}\sqrt{-3}+\frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $-3+3i$

해설

$$\sqrt{3}\sqrt{-3}+\sqrt{-3}\sqrt{-3}+\frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

$$=\sqrt{3\cdot(-3)}-\sqrt{(-3)\cdot(-3)}+\sqrt{\frac{-18}{2}}-\sqrt{\frac{18}{-2}}$$

$$=\sqrt{-9}-\sqrt{9}+\sqrt{-9}-\sqrt{-9}$$

$$=-\sqrt{9}+\sqrt{-9}$$

$$=-3+3i$$

18. 이차방정식 $x^2-5x+p=0$의 두 근은 $3, \alpha$이고 $x^2-px+q=0$의 두 근은 α, β이다. 이 때 β의 값은?(단 p, q는 상수)

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

이차방정식 $x^2-5x+p=0$에서
근과 계수의 관계에 의해
두 근의 합 : $3+\alpha=5 \quad \therefore \ \alpha=2$
두 근의 곱 : $3\cdot\alpha=p=3\cdot2=6$
이차방정식 $x^2-6x+q=0$의 두 근이 $2, \beta$이므로
$2+\beta=6 \quad \therefore \ \beta=4$

19. x에 관한 이차방정식 $x^2+2(m+a-2)x+m^2+a^2-3b=0$이 m에 관계없이 항상 중근을 가질 때, $a+3b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x^2+2\cdot(m+a-2)x+(m^2+a^2-3b)=0$

중근을 가지려면 $\dfrac{D}{4}=0$

$(m+a-2)^2-1\cdot(m^2+a^2-3b)=0$

m에 대한 항등식이므로

정리해서 m으로 묶으면,

$m\cdot(2a-4)+(4-4a+3b)=0$

$a=2, 3b=4a-4=4$

$\therefore\ a+3b=6$

20. 이차방정식 $(2-k)x^2+2kx+1=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 범위를 구하면?

① $k \le 2$ ② $k > -2$ ③ $k \le -2$

④ $0 < k \le 2$ ⑤ $k > 2$

해설

서로 다른 부호의 실근을 가지려면 두 근의 곱인 $\dfrac{1}{2-k} < 0$을 만족시키면 된다.

따라서 $k > 2$

21. $x+y=3, x\geq 0, y\geq 0$일 때, $2x^2+y^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면 $M-m$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$y=3-x\geq 0$

$\therefore\ 0\leq x\leq 3$

$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$

$x=1$일 때, $m=6$

$x=3$일 때, $M=18$

$\therefore\ M-m=12$

22. $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2(ac + bd)$를 바르게 인수분해 한 것은?

① $(a+b-c-d)(a-b+c+d)$

② $(a+b+c+d)(a-b+c-d)$

③ $(a+b+c-d)(a-b+c+d)$

④ $(a-b+c-d)(a-b+c+d)$

⑤ $(a+b+c+d)(a-b-c+d)$

해설

$$
\begin{aligned}
& a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2(ac + bd) \\
&= (a^2 + 2ac + c^2) - (b^2 - 2bd + d^2) \\
&= (a+c)^2 - (b-d)^2 \\
&= (a+b+c-d)(a-b+c+d)
\end{aligned}
$$

23. $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\cdots+99^2$ 을 계산하여라.

① 99　② 100　③ 4950

④ 5050　⑤ 10000

해설

$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\cdots+99^2$

$=99^2-98^2+97^2-96^2+\cdots+3^2-2^2+1^2$

$=(99^2-98^2)+(97^2-96^2)+$

$\cdots+(3^2-2^2)+1^2$

$=(99-98)(99+98)+(97-96)(97+96)+\cdots+(3-2)(3+2)+1$

$=(99+98)+(97+96)+\cdots+(3+2)+1$

$=1+2+3+\cdots+99$

$=(1+99)+(2+98)+\cdots+(49+51)+50$

$=4950$

24. n이 짝수일 때, $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$ 의 값은?

① -2 ② $-\sqrt{2}$ ③ 0 ④ 2 ⑤ $\sqrt{2}$

해설

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$$

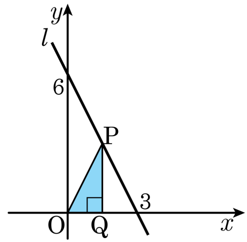
$$=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\left\{\left(\frac{1-\pi}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{2n}\cdot\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=(\pi^2)^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\{(-\pi)^2\}^{2n}-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

25. 다음 그림과 같이 직선 l 위를 움직이는 점 P 가 있다. x 축 위에 내린 수선의 발을 Q 라고 할 때, $\triangle$POQ 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{9}{4}$

해설

직선 l 은 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 6)$ 을 지나므로

$y = -2x + 6$

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b = -2a + 6$

$$\begin{aligned}\triangle\text{POQ} = \frac{1}{2}ab &= \frac{1}{2}a(-2a+6)\\ &= -a^2 + 3a\\ &= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\end{aligned}$$

한편, 점 P 는 제 1사분면 위의 점이므로

$a > 0,\ b = -2a + 6 > 0 \qquad \therefore\ 0 < a < 3$

따라서 $\triangle$POQ 의 넓이는 $a = \dfrac{3}{2}$ 일 때, 최댓값 $\dfrac{9}{4}$ 를 갖는다.