

1. 집합 $A = \{2, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합 중 원소 2를 반드시 포함하고 3을 포함하지 않는 부분집합의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

집합 A 에서 원소 2를 반드시 포함하고, 3을 포함하지 않는 부분집합을 구하면 $\{2\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{2, 5, 7\}$ 이므로 4개이다.

2. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$, $B = \{1, 3, 6, 9\}$ 에 대하여 $A \cap B$ 와 $A \cup B$ 가 올바르게 짝지어진 것은?

① $A \cap B = \{1, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$

② $A \cap B = \{1, 2, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3\}$

③ $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$, $A \cup B = \{1, 3, 6\}$

④ $A \cap B = \{1, 3, 6\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$

⑤ $A \cap B = \{1, 3, 6\}$, $A \cup B : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

해설

교집합은 두 집합 A , B 에 대하여 집합 A 에도 속하고, 집합 B 에도 속하는 원소로 이루어진 집합을 말한다. 그리고 합집합은 두 집합 A , B 에 대하여 집합 A 에 속하거나 집합 B 에 속하는 원소 전체로 이루어진 집합을 말한다.

따라서 문제의 두 집합 A , B 에 대하여 $A \cap B = \{1, 3, 6\}$ 이고 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ 이다.

3. $(a+b)(p+q+r)(x+y)$ 를 전개하였을 때, 모든 항의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

a, b 중 한 개를 택하는 방법 : 2 가지

p, q, r 중 한 개를 택하는 방법 : 3 가지

x, y 중 한 개를 택하는 방법 : 2 가지

전개했을 때 모든 항의 개수는

$$2 \times 3 \times 2 = 12 \text{ (개)}$$

4. ${}_nC_4 = {}_nC_6$ 을 만족하는 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 10$

해설

$$n = 4 + 6 = 10$$

5. 10 명의 학생이 있다. 5 명, 5 명의 두 무리로 나누는 방법은 몇 가지인지 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 126 가지

해설

$${}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{2!} = 126 \text{ (가지)} \leftarrow 5 \text{ 명씩 } 2 \text{ 패}$$

6. 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수는?

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\{2, 4\} \cap X = \{2, 4\}$$

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 4 개 ④ 8 개 ⑤ 16 개

해설

$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 는 $X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 와 같고,

$\{2, 4\} \cap X = \{2, 4\}$ 는 $\{2, 4\} \subset X$ 와 같다.

즉, X 는 원소 2, 4 를 반드시 포함하는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합이다.

따라서 X 의 개수는 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 원소 2, 4 를 제외한 $\{1, 3, 5\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

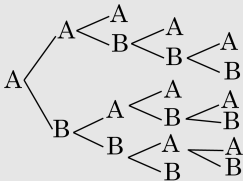
$$\therefore 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ (개)}$$

7. A, B 두 사람이 테니스 경기를 하는데, 경기는 5세트 중 3세트 이기는 쪽이 승리한다. A가 먼저 1승을 거둔 상태에서 승부가 결정될 때까지 일어날 수 있는 모든 경우의 수는?

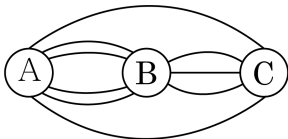
▶ 답: 가지

▷ 정답: 10가지

해설



8. 그림과 같이 A 에서 B 로 가는 길은 4 가지, B 에서 C 로 가는 길은 3 가지, A 에서 C 로 가는 길은 2 가지이다. A 에서 C 를 왕복하는 데 B 를 한 번만 거치는 방법의 수는?



① 24

② 48

③ 56

④ 72

⑤ 96

해설

$$(1) A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$$

$$: 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$(1) A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$$

$$: 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$\therefore 24 + 24 = 48$$

9. 팔각형의 대각선의 개수를 구하여라.

① 16

② 20

③ 22

④ 28

⑤ 32

해설

점 8개 중 2개를 골라 직선을 만들고 그 중에서 팔각형의 변이 되는 경우를 제한다.

$${}_8C_2 - 8 = 20$$

10. 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 18\}$ 를 조건제시법으로 올바르게 나타낸 것을 모두 골라라.

㉠ $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 18 \text{인 정수}\}$

㉡ $A = \{x \mid 1 < x \leq 17 \text{인 짝수}\}$

㉢ $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{보다 작은 짝수}\}$

㉣ $A = \{x \mid x \text{는 } 18 \text{ 이하의 짝수}\}$

㉤ $A = \{x \mid x \text{는 } 19 \text{ 미만의 짝수}\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉤

해설

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 6, 8, \dots, 18\} \\ &= \{x \mid x \text{는 } 20 \text{보다 작은 짝수}\} \\ &= \{x \mid x \text{는 } 19 \text{ 미만의 짝수}\} \\ &= \{x \mid x \text{는 } 18 \text{ 이하의 짝수}\} \end{aligned}$$

11. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{ 이하의 } 3\text{의 배수}\}$ 일 때, 적어도 하나의 원소가 짝수인 집합 A 의 부분집합의 개수는?

- ① 6 개 ② 12 개 ③ 18 개 ④ 24 개 ⑤ 30 개

해설

$A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ 적어도 하나는 짝수인 부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 홀수의 원소로만 이루어진 부분집합의 개수를 빼면 되므로 $2^5 - 2^3 = 32 - 8 = 24$ (개)이다.

12. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 보기의 연산 과정 중 처음으로 잘못된 곳을 골라라.

보기

$$A^c - B^c = A^c \cap (B^c)^c = A^c \cap B = B - A = (A \cup B) - B$$

㉠

㉡

㉢

㉣

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

$B - A = (A \cup B) - A$ 이다. 따라서 잘못된 곳은 ㉣ $B - A = (A \cup B) - B$ 이다.

13. 자신의 영문 이름을 이용하여 이메일 아이디를 만들려고 한다. 첫 번째 자리에는 자신의 영문 이름 중 모음을, 두 번째 자리에는 자음을, 세 번째 자리에는 다시 모음을 사용하여 만들 때, 영문 이름이 Lee Soon-shin인 사람이 만들 수 있는 아이디의 개수는? 단, 대소문자의 구분은 없고, 같은 알파벳은 2번 이상 사용하지 않는다.

① 12

② 18

③ 24

④ 30

⑤ 36

해설

두 번째 자리에 올 수 있는 자음의 가지수는 4가지이고,
모음 3가지를 첫 번째 세 번째에 배열하는 방법은 ${}_3P_2$ 이다.

$$\therefore 4 \times {}_3P_2 = 24$$

14. 키가 모두 다른 남학생 세 명과 여학생 세 명이 일렬로 놓인 의자에 앉으려고 한다. 남학생끼리는 키가 작은 학생이 큰 학생보다 왼쪽에 앉아야 할 때, 방법의 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

남학생 세 명이 앉는 순서는 정해져 있다.

6명이 앉는 방법의 수를 남학생 3명이 자리를 바꿔 앉는 방법의 수로 나누면

$$\frac{6!}{3!} = 120$$

15. 전체집합이 $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 10, x \text{는 정수}\}$ 이고, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $S \cap A^c = \emptyset$, $n(S \cap B) = 3$ 일 때, 집합 S 의 개수는 ?

① 4 개

② 8 개

③ 16 개

④ 32 개

⑤ 64 개

해설

$S \cap B$ 는 $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ 가 될 수 있다.

$S \cap A^c = S - A = \emptyset$ 이므로, $S \subset A$

따라서 $S \cap B = \{1, 2, 3\}$ 인 경우, S 는 1, 2, 3 을 원소로 갖고 4 를 원소로 갖지 않는 A 의 부분집합이 되어 그 개수는 집합 $\{5, 6\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$S \cap B = \{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ 인 경우도 같은 수만큼의 부분집합이 있으므로

S 의 개수는 $2^2 \times 4 = 16$ (개) 이다.

16. 긴 나무막대기 위에 이 막대기의 길이를 10등분, 12등분, 15등분하는 세 종류의 눈금이 새겨져 있다. 이 눈금을 따라 막대기를 자르면 모두 몇 토막이 나겠는가?

① 20토막

② 28토막

③ 36토막

④ 48토막

⑤ 60토막

해설

나무막대기의 길이를 1이라 하면 세 종류의 눈금의 간격은 각각 $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$ 이다.

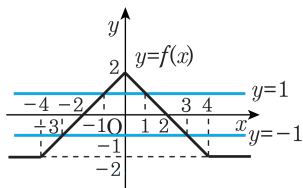
즉, $\frac{6}{60}$, $\frac{5}{60}$, $\frac{4}{60}$ 이므로 60이하의 수 중에서 4의 배수 또는 5의 배수 또는 6의 배수인 수의 개수를 구하면 된다. 60이하의 자연수 중 4의 배수, 5의 배수, 6의 배수의 집합을 각각 A , B , C 라 하면

$$n(A) = 15, n(B) = 12, n(C) = 10, n(A \cap B) = 3, n(B \cap C) = 2, n(C \cap A) = 5, n(A \cap B \cap C) = 1$$

$$\therefore n(A \cup B \cup C)$$

$$\begin{aligned} &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 15 + 12 + 10 - 3 - 2 - 5 + 1 \\ &= 28 \end{aligned}$$

17. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 모든 x 의 값의 곱은?



- ① -3 ② -1 ③ 3
④ 6 ⑤ 9

해설

주어진 그래프로부터 함수 $f(x)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & (x \leq -4) \\ x + 2 & (-4 < x \leq 0) \\ -x + 2 & (0 < x \leq 4) \\ -2 & (x > 4) \end{cases}$$

한편, $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 1 \dots\dots \textcircled{1}$

① 에서 $f(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌표이므로 위의 그림에서 $x = -1, x = 1$

따라서, ①에서 $f(x) = -1$ 또는 $f(x) = 1$

(i) $f(x) = -1$ 일 때, 이를 만족하는 x 의 값은

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -1$ 의 교점의 x 좌표이므로 위의 그림에서 $x = -3$ 또는 $x = 3$

(ii) $f(x) = 1$ 일 때, 이를 만족하는 x 의 값은

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌표이므로 위의 그림에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

(i), (ii) 로부터 구하는 모든 x 의 값의 곱은

$$(-3) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 1 = 9$$

18. $x = \left\{ \frac{(\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}-1)^n}{2} \right\}^2$ 일 때, $\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$ 의 값을 구하면? (단, n 은 정수)

① 2

② $(\sqrt{2}+1)^n$

③ $(\sqrt{2}-1)^n$

④ $n \geq 0$ 일 때 $(\sqrt{2}-1)^n$, $n < 0$ 일 때 $(\sqrt{2}+1)^n$

⑤ $n \geq 0$ 일 때 $(\sqrt{2}+1)^n$, $n < 0$ 일 때 $(\sqrt{2}-1)^n$

해설

$a = (\sqrt{2}+1)^n$, $b = (\sqrt{2}-1)^n$ 이라 하면

$a > 0$, $b > 0$ 으로부터 $\sqrt{x} = \frac{a+b}{2}$

또한 $ab = \{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\}^n = 1$ 로부터

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} &= \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \\ &= \frac{|a-b|}{2}\end{aligned}$$

i) $n \geq 0$ 일 때, $a \geq b$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - \sqrt{x-1} &= \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \\ &= b = (\sqrt{2}-1)^n\end{aligned}$$

ii) $n < 0$ 일 때, $a < b$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - \sqrt{x-1} &= \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \\ &= a = (\sqrt{2}+1)^n\end{aligned}$$

19. $\sqrt{x} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} (a > 1)$ 일 때, $\frac{x-2-\sqrt{x^2-4x}}{x+2+\sqrt{x^2-4x}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{a(a-2)}$

② $\frac{1}{2a+4}$

③ $\frac{a}{2a+4}$

④ $\frac{a}{a+2}$

⑤ $\frac{1}{a(a+2)}$

해설

제곱하면 $x = a + \frac{1}{a} + 2$

$x - 2 = a + \frac{1}{a}$ 로부터,

$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$

$= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4$

$= \left(a - \frac{1}{a}\right)^2$

그런데 $a > 1$ 로부터, $a - \frac{1}{a} > 0$

$\therefore \sqrt{x^2 - 4x} = a - \frac{1}{a}$ 에서 주어진 식

$= \frac{\frac{2}{a}}{2a + 4} = \frac{1}{a(a + 2)}$

20. 곡선 $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0$ 에 x 축 위의 점 $(a, 0)$ 으로 부터 그은 두 접선이 직교하도록 a 의 값을 정하면?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

곡선 $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0$ 에 접하는 직선의 기울기를 m 이라 하면,

그 접선은 점 $(a, 0)$ 을 지나므로 $y = m(x - a)$

이것을 주어진 식에 대입하여 정리하면,

$$(mx - am)^2 - 2(mx - am) + 4x - 3 = 0$$

$$m^2x^2 - 2(am^2 + m - 2)x + a^2m^2 + 2am - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (am^2 + m - 2)^2 - m^2(a^2m^2 + 2am - 3) = 0$$

정리하면, $(1 - a)m^2 - m + 1 = 0$

m 의 두 근을 α, β 라 하면,

두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta = -1$ 이어야 하므로

$$\alpha\beta = \frac{1}{1 - a} = -1$$

$$\therefore a = 2$$