

1. 인수분해 공식을 이용하여 $2 \times 20^2 - 2 \times 40 + 2$ 를 계산할 때, 이용된 공식을 다음 보기 중에서 모두 고르면?

㉠ $ma + mb = m(a + b)$

㉡ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

㉢ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

㉤ $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉤

해설

$$\begin{aligned} & 2 \times 20^2 - 2 \times 40 + 2 \\ &= 2(20^2 - 40 + 1) \rightarrow ma + mb = m(a + b) \\ &= 2(20^2 - 2 \times 20 \times 1 + 1^2) \\ &= 2(20 - 1)^2 \rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \\ &= 2 \times 19^2 \end{aligned}$$

2. 인수분해 공식을 이용하여 $\frac{1}{4} \times 42^2 - \frac{1}{4} \times 38^2$ 의 값을 구하고, 이용한 공식을 보기에서 모두 골라라.

㉠ $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

㉡ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

㉢ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

㉣ $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

㉤ $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$

㉥ $ma + mb = m(a + b)$

① ㉠, ㉢, 80

② ㉢, ㉣, 80

③ ㉢, ㉥, 80

④ ㉡, ㉣, 70

⑤ ㉡, ㉥, 70

해설

$$\frac{1}{4} \times 42^2 - \frac{1}{4} \times 38^2$$

$$= \frac{1}{4} \times (42^2 - 38^2) \rightarrow ma + mb = m(a + b)$$

$$= \frac{1}{4} \times (42 + 38)(42 - 38) \rightarrow a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$= \frac{1}{4} \times 80 \times 4 = 80$$

3. 인수분해 공식을 이용하여 다음 두 수 $B - 10A$ 의 값을 구하면?

$$A = 18 \times 25 - 18 \times 23, B = 21^2 - 2 \times 21 + 1$$

① 400

② 360

③ 200

④ 160

⑤ 40

해설

$$A = 18(25 - 23) = 18 \times 2 = 36$$

$$B = (21 - 1)^2 = 20^2 = 400$$

$$\therefore B - 10A = 400 - 10 \times 36 = 400 - 360 = 40$$

4. $5007 \times 5009 + 1$ 이 어떤 자연수의 제곱일 때, 어떤 자연수를 구하면?

① 5005

② 5006

③ 5007

④ 5008

⑤ 5009

해설

$$\begin{aligned} 5007 \times 5009 + 1 &= (5008 - 1)(5008 + 1) + 1 \\ &= 5008^2 - 1 + 1 = 5008^2 \end{aligned}$$

5. 다음 식을 간단히 나타낸 것은?

$$\frac{2}{1 + \sqrt{2}} - (1 + \sqrt{2})^2$$

① -5

② -4

③ -3

④ -2

⑤ -1

해설

$$\frac{2}{1 + \sqrt{2}} = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = -2 + 2\sqrt{2}$$

$$(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\therefore (\text{준식}) = -2 + 2\sqrt{2} - 3 - 2\sqrt{2} = -5$$

6. $a = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ 일 때, $2\sqrt{3}a - 6\sqrt{2}b$ 의 값은?

- ① -24 ② -12 ③ 12 ④ 24 ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{3}a - 6\sqrt{2}b \\ &= 2\sqrt{3}(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) - 6\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \\ &= 6\sqrt{6} - 12 - 12 - 6\sqrt{6} \\ &= -24 \end{aligned}$$

7. $a = 1 + \sqrt{2}$, $b = 1 - \sqrt{2}$ 일 때, $\frac{b}{a} - \frac{a}{b}$ 의 값은?

① $-4\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2}$

③ $2\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ $6\sqrt{2}$

해설

$$ab = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$$

$$a + b = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2$$

$$a - b = (1 + \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{b}{a} - \frac{a}{b} &= \frac{b^2 - a^2}{ab} \\ &= \frac{-(a+b)(a-b)}{ab} \\ &= \frac{-2 \times 2\sqrt{2}}{-1} \\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

8. $x = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ 일 때, $x^2 + 3xy + y^2$ 의 값은?

① 3

② 6

③ 9

④ 12

⑤ 15

해설

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1$$

$$x^2 + 3xy + y^2 = (x+y)^2 + xy \text{에서}$$

$$x+y = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}+1) = 2\sqrt{2}$$

$$xy = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$$

$$\therefore (\text{준식}) = (x+y)^2 + xy = (2\sqrt{2})^2 + 1 = 9$$

9. $x + y = 2, x - y = 3$ 일 때, $x^2 - 2x + 1 - y^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 1 - y^2 &= (x - 1)^2 - y^2 \\&= (x - 1 + y)(x - 1 - y) \\&= (x + y - 1)(x - y - 1) \\&= (2 - 1)(3 - 1) \\&= 1 \times 2 = 2\end{aligned}$$

10. $a = \sqrt{2} + 1$, $b = \sqrt{2} - 1$ 일 때, $a^2 - b^2$ 의 값은?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $3\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$$a^2 - b^2$$

$$= (a + b)(a - b)$$

$$= (\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1)$$

$$= 2\sqrt{2} \times 2$$

$$= 4\sqrt{2}$$

11. $8^{32} - 1$ 이 자연수 n 에 의해 나누어 떨어질 때, n 의 값의 합을 구하여라.
(단, $60 < n < 70$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 128

해설

$$\begin{aligned} 8^{32} - 1 &= (2^3)^{32} - 1 = 2^{96} - 1 \\ &= (2^{48} + 1)(2^{24} + 1)(2^{12} + 1) \\ &\quad (2^6 + 1)(2^3 + 1)(2^3 - 1) \end{aligned}$$

60 과 70 사이의 자연수 n 은 $2^6 + 1 = 65$ 또는 $2^6 - 1 = 63$ 이므로
그 합은 $65 + 63 = 128$ 이다.

12. 자연수 $2^{160} - 1$ 은 30 과 40 사이의 두 자연수에 의하여 나누어떨어진 다. 이 두 자연수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

$$2^{160} - 1$$

$$= (2^{80} + 1)(2^{40} + 1)(2^{20} + 1)(2^{10} + 1)(2^5 + 1)(2^5 - 1)$$

$2^{160} - 1$ 을 나누어 떨어지게 하는 수 중 30 과 40 사이의 수는 $2^5 + 1 = 33$ 과 $2^5 - 1 = 31$ 이다.

$$\therefore 33 + 31 = 64$$

13. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ 임을 활용하여, $1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - 11^2 + 13^2 - 15^2 + 17^2 - 19^2$ 을 계산하면?

① -100

② -200

③ -300

④ -450

⑤ -540

해설

$$\begin{aligned} & 1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - 11^2 + 13^2 - 15^2 + 17^2 - 19^2 \\ &= (1-3)(1+3) + (5-7)(5+7) + \cdots + (17-19)(17+19) \\ &= -2(1+3) - 2(5+7) - 2(9+11) - 2(13+15) - 2(17+19) \\ &= -2(1+3+5+\cdots+17+19) \\ &= -2 \times 5 \times 20 \\ &= -200 \end{aligned}$$

14. $2^2 - 6^2 + 10^2 - 14^2 + 18^2 - 22^2 + 26^2 - 30^2$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -512

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= (2 - 6)(2 + 6) + (10 - 14)(10 + 14) \\&\quad + (18 - 22)(18 + 22) \\&\quad + (26 - 30)(26 + 30) \\&= -4(2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22 + 26 + 30) \\&= -4 \times 4 \times 32 \\&= -512\end{aligned}$$

15. 다음 자연수 중 $3^{16} - 1$ 을 나누어 떨어지게 하는 수가 아닌 것은?

① 2

② 4

③ 5

④ 9

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} 3^{16} - 1 &= (3^8 - 1)(3^8 + 1) \\ &= (3^4 - 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1) \\ &= (3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1) \\ &= (3 - 1)(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1) \\ &= 2 \times 4 \times 10 \times 82 \times 6562 \end{aligned}$$

16. $a = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$, $b = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ 일 때, $a^2 + 3ab + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

$$\begin{aligned} & a^2 + 3ab + b^2 \\ &= (a+b)^2 + ab \\ &= \left(\frac{1}{3-2\sqrt{2}} + \frac{1}{3+2\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{3-2\sqrt{2}} \times \frac{1}{3+2\sqrt{2}} \\ &= \left(\frac{3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} \right)^2 + \frac{1}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} \\ &= \left(\frac{6}{9-8} \right)^2 + \frac{1}{9-8} = 36 + 1 = 37 \end{aligned}$$

17. $\sqrt{18}$ 의 소수 부분을 a , $2\sqrt{5}$ 의 정수 부분을 b 라 할 때,
 $\frac{a^3 - b^3 + a^2b - ab^2}{a - b}$ 의 값을 구하면?

① 13

② 15

③ 18

④ 20

⑤ 24

해설

$$4 < \sqrt{18} < 5 \text{ 이므로 } a = \sqrt{18} - 4$$

$$4 < \sqrt{20} < 5 \text{ 이므로 } b = 4$$

$$a + b = \sqrt{18}$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \frac{a(a^2 - b^2) + b(a^2 - b^2)}{a(a + b)(a - b) + b(a + b)(a - b)} \\ &= \frac{(a - b)(a + b)^2}{(a + b)^2} \\ &= 18 \end{aligned}$$

18. $a = 1 + \sqrt{2}$ 일 때, $\frac{a^2 - 2a + 3}{a - 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $2\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a^2 - 2a + 3}{a - 1} &= \frac{(a^2 - 2a + 1) + 2}{a - 1} \\&= \frac{(a - 1)^2 + 2}{a - 1} \\&= \frac{(1 + \sqrt{2} - 1)^2 + 2}{1 + \sqrt{2} - 1} \\&= \frac{(\sqrt{2})^2 + 2}{\sqrt{2}} \\&= \frac{2 + 2}{\sqrt{2}} \\&= \frac{4}{\sqrt{2}} \\&= \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

19. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 일 때, $(x^n - y^n)^2 - (x^n + y^n)^2$ 의 값을 구하여라. (단, n 은 양의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\begin{aligned} & (x^n - y^n)^2 - (x^n + y^n)^2 \\ &= (x^n - y^n + x^n + y^n)(x^n - y^n - x^n - y^n) \\ &= 2x^n \times (-2y^n) = -4(xy)^n \\ & xy = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1 \\ & \therefore -4(xy)^n = -4 \end{aligned}$$

20. $x = 3 + \sqrt{8}$, $y = 3 - \sqrt{8}$ 일 때, $(x^n + y^n)^2 - (x^n - y^n)^2$ 의 값은?(단, n 은 양의 정수)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & (x^n + y^n)^2 - (x^n - y^n)^2 \\ &= (x^n + y^n + x^n - y^n)(x^n + y^n - x^n + y^n) \\ &= 2x^n \times 2y^n = 4(xy)^n \\ & xy = (3 + \sqrt{8})(3 - \sqrt{8}) = 1 \\ & \therefore 4(xy)^n = 4 \end{aligned}$$

21. $x = \frac{1}{5 - 3\sqrt{3}}$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값으로 알맞은 것을 고르면?

① $\frac{130 + 75\sqrt{5}}{2}$

② $\frac{130 + 75\sqrt{3}}{2}$

③ $\frac{130 - 45\sqrt{3}}{2}$

④ $\frac{130 + 75\sqrt{3}}{3}$

⑤ $\frac{120 + 75\sqrt{3}}{2}$

해설

$$x = \frac{5 + 3\sqrt{3}}{(5 - 3\sqrt{3})(5 + 3\sqrt{3})} = \frac{5 + 3\sqrt{3}}{-2}$$

$$\frac{1}{x} = 5 - 3\sqrt{3},$$

$$x^2 = \frac{52 + 30\sqrt{3}}{4}, \quad \frac{1}{x^2} = 52 - 30\sqrt{3}$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{260 - 90\sqrt{3}}{4} = \frac{130 - 45\sqrt{3}}{2}$$

22. $x^3 - y^3 = -2$, $xy = -1$ 일 때, $x + y$ 의 값을 구하여라. (단, $x < y$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x + y = 0$

해설

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = -2$$

$xy = -1$ 을 대입하면

$$(x - y)^3 - 3(x - y) = -2,$$

$$(x - y)^3 - 3(x - y) + 2 = 0$$

$x - y = t$ 로 놓으면

$$t^3 - 3t + 2 = 0$$

이를 인수분해하면

$$t^3 - t^2 + t^2 - 3t + 2 = 0,$$

$$t^2(t - 1) + (t - 1)(t - 2) = 0$$

$$(t - 1)^2(t + 2) = 0$$

$$x - y = -2 \quad (\because x < y)$$

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy \text{ 이므로}$$

$$(x + y)^2 = (-2)^2 + 4(-1) = 0$$

$$\therefore x + y = 0$$

23. $a + b = \sqrt{6}$, $ab = 1$ 이고, $(a - b)a^2 + (b - a)b^2 = k$ 라 할 때, k^2 의 값을 구하면?

① 20

② 21

③ 22

④ 23

⑤ 24

해설

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a + b)^2 - 4ab \\ &= (\sqrt{6})^2 - 4 = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a - b)a^2 + (b - a)b^2 &= (a - b)a^2 - b^2(a - b) \\ &= (a - b)(a^2 - b^2) \\ &= (a + b)(a - b)^2 \\ &= 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\therefore k^2 = (2\sqrt{6})^2 = 24$$

24. $a = \sqrt{3} + 2$ 일 때, $3(a+2)^2 - 2(a+2) - 8$ 의 값은?

① $41 - 22\sqrt{3}$

② $22 + 41\sqrt{3}$

③ $22 - 41\sqrt{3}$

④ $22\sqrt{3} - 41$

⑤ $41 + 22\sqrt{3}$

해설

$a + 2 = t$ 로 치환하면

$$3(a+2)^2 - 2(a+2) - 8$$

$$= 3t^2 - 2t - 8$$

$$= (t-2)(3t+4)$$

$$= (a+2-2) \{3(a+2)+4\} = a(3a+10)$$

$$= (\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}+16)$$

$$= 41 + 22\sqrt{3}$$

25. $x = \sqrt{2} - 1$ 일 때, $6(x+2)^2 + 5(x+2) - 6 = a + b\sqrt{2}$ 이다. $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a - b = 0$

해설

$6(x+2)^2 + 5(x+2) - 6$ 에서

$x+2 = t$ 로 치환하면

$$6t^2 + 5t - 6 = (2t + 3)(3t - 2)$$

$t = x + 2 = \sqrt{2} + 1$ 이므로 이를 대입하면

$$(2\sqrt{2} + 2 + 3)(3\sqrt{2} + 3 - 2)$$

$$= (2\sqrt{2} + 5)(3\sqrt{2} + 1)$$

$$= 12 + 17\sqrt{2} + 5 = 17 + 17\sqrt{2}$$

따라서 $a = b = 17$ 이므로 $a - b = 0$

26. $x + \frac{1}{x} = 4$ 일 때, $x - \frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 있는 것을 모두 고르면?

① $2\sqrt{3}$

② $3\sqrt{3}$

③ $-2\sqrt{3}$

④ $-3\sqrt{3}$

⑤ 2

해설

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 4^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 16$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 16 - 2 = 14$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 14 - 2 = 12$$

$$x - \frac{1}{x} = \pm \sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

27. $a = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ 일 때, $a^2 + 2ab + b^2$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \\ &= \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{4}{2} \right)^2 = 4 \end{aligned}$$

28. $a - b = \sqrt{3} + 2$ 일 때, $a^2 + b^2 - 2ab - 4a + 4b + 4$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (a - b)^2 - 4(a - b) + 4 \\&= \{(a - b)^2 - 2\}^2 \\&= \{(\sqrt{3} + 2) - 2\}^2 \\&= 3\end{aligned}$$

29. $xy = 4$, $x^2 + y^2 = 8$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하여라. (단, $x + y > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 8 + 2 \times 4 = 16$$

$x + y > 0$ 이므로 $x + y = 4$

$$(x^2 + y^2)(x + y) = x^3 + y^3 + xy(x + y)$$

$$8 \times 4 = x^3 + y^3 + 4 \times 4$$

$$x^3 + y^3 = 32 - 16 = 16$$

30. $xy = 3$, $x^2 + y^2 = 6$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값은? (단, $x + y > 0$)

① $2\sqrt{3}$

② $4\sqrt{3}$

③ $6\sqrt{3}$

④ $8\sqrt{3}$

⑤ $10\sqrt{3}$

해설

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 6 + 2 \times 3 = 12$$

$$x + y > 0 \text{ 이므로 } x + y = 2\sqrt{3}$$

$$(x^2 + y^2)(x + y) = x^3 + y^3 + xy(x + y)$$

$$6 \times 2\sqrt{3} = x^3 + y^3 + 3 \times 2\sqrt{3}$$

$$x^3 + y^3 = 6\sqrt{3}$$

31. $\frac{10^2}{26^2 + 40^2 + 49^2 - 16^2 - 30^2 - 39^2}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{20}$

해설

$$\begin{aligned}\text{분모} &= (26^2 - 16^2) + (40^2 - 30^2) + (49^2 - 39^2) \\ &= (26 - 16)(26 + 16) + (40 - 30)(40 + 30) \\ &\quad + (49 - 39)(49 + 39) \\ &= 10 \times 42 + 10 \times 70 + 10 \times 88 \\ &= 2000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{10^2}{26^2 + 40^2 + 49^2 - 16^2 - 30^2 - 39^2} \\ &= \frac{100}{2000} = \frac{1}{20}\end{aligned}$$

32. $a + b = -1$, $(a + 1)(b + 1) = -12$ 일 때, 다음 식의 값은?

$$a^3 + b^3 + a^2b + ab^2$$

① -25

② -24

③ -23

④ -22

⑤ -21

해설

$$(a + 1)(b + 1) = ab + (a + b) + 1 = -12$$

$$a + b = -1 \text{ 이므로 } ab = -12$$

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + a^2b + ab^2 &= a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 \\ &= a^2(a + b) + b^2(a + b) \\ &= (a + b)(a^2 + b^2) \\ &= (a + b)\{(a + b)^2 - 2ab\} \\ &= (-1) \\ &\quad \times \{(-1)^2 - 2 \times (-12)\} \\ &= (-1) \times 25 = -25 \end{aligned}$$

33. 두 정수 a, b 가 $(a-1)^2 - 4b^2 = 33$ 을 만족할 때, 순서쌍 (a, b) 는 모두 몇 개 존재하는가? (단, $a > 2b > 0$)

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$$(a-1)^2 - 4b^2 = 33 \text{ 에서}$$

$$(a+2b-1)(a-2b-1) = 33$$

$a > 2b > 0$ 이므로

$$33 \times 1 = 33 \text{ 또는 } 11 \times 3 = 33$$

따라서 조건을 만족하는 (a, b) 는 $(18, 8), (8, 2)$ 2개 존재한다.

34. 다음을 계산하여라.

$$20^2 - 21^2 + 22^2 - 23^2 + 24^2 - 25^2$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -135

해설

$$\begin{aligned} & 20^2 - 21^2 + 22^2 - 23^2 + 24^2 - 25^2 \\ &= (20 + 21)(20 - 21) + (22 + 23)(22 - 23) \\ &\quad + (24 + 25)(24 - 25) \\ &= 41 \times (-1) + 45 \times (-1) + 49 \times (-1) = -135 \end{aligned}$$

35. $\frac{207^2 - 134^2}{52^2 - 21^2}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{(207 + 134)(207 - 134)}{(52 + 21)(52 - 21)} \\ &= \frac{341 \times 73}{73 \times 31} = 11\end{aligned}$$

36. $1 < p < 2$ 이고, $\sqrt{x} = p - 1$ 일 때, $\sqrt{x+4p} + \sqrt{x-2p+3}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\sqrt{x} = p - 1$ 의 양변을 제곱하면

$x = (p - 1)^2$ 이므로

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+4p} + \sqrt{x-2p+3} \\ &= \sqrt{(p-1)^2+4p} + \sqrt{(p-1)^2-2p+3} \\ &= \sqrt{(p+1)^2} + \sqrt{(p-2)^2} \end{aligned}$$

이때, $2 < p + 1 < 3$ 이고, $-1 < p - 2 < 0$ 이므로

$$\therefore (\text{주어진 식}) = p + 1 - (p - 2) = 3$$

37. 2 보다 큰 실수 a, b 에 대하여 $a^2 - 4a - 2 = 0$, $b^2 + 4b - 2 = 0$ 일 때, $a^4 - b^4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $160\sqrt{6}$

해설

$$a^2 - 4a - 2 = 0, b^2 + 4b - 2 = 0$$

두 식을 완전제곱꼴로 만들면

$$a^2 - 4a + 4 - 6 = 0, a^2 - 4a + 4 = 6,$$

$$(a - 2)^2 = 6 \cdots \textcircled{1}$$

$$b^2 + 4b + 4 - 6 = 0, b^2 + 4b + 4 = 6,$$

$$(b + 2)^2 = 6 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } a - 2 = \sqrt{6} (\because a > 2), a = 2 + \sqrt{6}$$

$$\textcircled{2} \text{에 의하여 } b + 2 = \sqrt{6} (\because b > 2), b = \sqrt{6} - 2$$

$$\therefore a + b = 2\sqrt{6}, a - b = 4, ab = 2$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a + b)^2 - 2ab \\ &= (2\sqrt{6})^2 - 2 \times 2 \\ &= 24 - 4 = 20 \end{aligned}$$

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$$

$$\therefore a^4 - b^4 = 2\sqrt{6} \times 4 \times 20 = 160\sqrt{6}$$

38. 0 이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{a^2b^2} + 1$ 일 때, $a^8 + b^8 + (a^2 - b^2)^4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{a^2b^2} + 1 \text{ 에서}$$

$$\frac{b^4 + a^4}{a^2b^2} = \frac{1 + a^2b^2}{a^2b^2}, a^4 + b^4 - a^2b^2 = 1$$

$$\therefore (a^2 - b^2)^2 = 1 - a^2b^2$$

$$\therefore a^8 + b^8 + (a^2 - b^2)^4$$

$$= a^8 + b^8 + (1 - a^2b^2)^2$$

$$= a^8 + b^8 + a^4b^4 - 2a^2b^2 + 1$$

$$= (a^4 + a^2b^2 + b^4)(a^4 - a^2b^2 + b^4) - 2a^2b^2 + 1$$

$$= (a^4 + a^2b^2 + b^2) - 2a^2b^2 + 1$$

$$= a^4 - a^2b^2 + b^4 + 1$$

$$= 2$$

39. 양수 a, b 에 대하여. $a^2b + ab^2 = 12$, $a^3 + b^3 = 28$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$a^2b + ab^2 = ab(a + b) = 12$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 28$$

$a + b = X$, $ab = Y$ 로 치환하면

$$XY = 12, X^3 - 3XY = 28$$

$$\therefore X = 4, Y = 3$$

따라서 $a^2 + b^2 = X^2 - 2Y = 16 - 6 = 10$ 이다.

40. $a^2 + a + 1 = 0$ 일 때, $a^{11} + \frac{1}{a^{11}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$a^2 + a + 1 = 0$ 의 양변을 a ($a \neq 0$) 로 나누면

$$a + 1 + \frac{1}{a} = 0$$

$$\therefore a + \frac{1}{a} = -1$$

$a^2 + a + 1 = 0$ 의 양변에 $a - 1$ 을 곱하면

$$(a - 1)(a^2 + a + 1) = 0$$

$$\therefore a^3 - 1 = 0, a^3 = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore a^{11} + \frac{1}{a^{11}} &= (a^3)^3 \cdot a^2 + \frac{1}{(a^3)^3 \cdot a^2} \\ &= a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \\ &= (-1)^2 - 2 = -1\end{aligned}$$

41. $x^2 + 2x - 1 = 0$ 일 때, $x^4 - 3x^2 + 6x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \text{ 에서}$$

$$x^2 = 1 - 2x$$

$$x^4 = (1 - 2x)^2$$

$$= 1 - 4x + 4x^2$$

$$= 1 - 4x + 4(1 - 2x)$$

$$= 1 - 4x + 4 - 8x$$

$$= 5 - 12x$$

$$\therefore x^4 - 3x^2 + 6x = 5 - 12x - 3(1 - 2x) + 6x$$

$$= 5 - 12x - 3 + 6x + 6x$$

$$= 2$$

42. $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때, $x^2 - y^2 + 4x - 4y$ 의 식의 값을 구하면?

① -4

② 4

③ $8\sqrt{3}$

④ $16\sqrt{3}$

⑤ 24

해설

x, y 의 합과 차를 구하면

$$x + y = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$

$$x - y = 2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore x^2 - y^2 + 4x - 4y$$

$$= (x + y)(x - y) + 4(x - y)$$

$$= (x - y)(x + y + 4)$$

$$= 2\sqrt{3} \times (4 + 4) = 16\sqrt{3}$$

43. $\frac{x^2 - y^2}{xy - y^2} = 3$ 일 때, $x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16y - 11$ 의 값은? (단, $x \neq y$)

① -13

② -7

③ -5

④ -3

⑤ -11

해설

$$\frac{x^2 - y^2}{xy - y^2} = 3 \text{ 에서 } \frac{(x+y)(x-y)}{y(x-y)} = 3,$$

$x \neq y$ 이므로 $x - y \neq 0$

$$\text{따라서, } \frac{x+y}{y} = 3, \quad x = 2y$$

$x = 2y$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} & x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16y - 11 \\ &= 4y^2 - 8y^2 + 4y^2 - 16y + 16y - 11 = -11 \end{aligned}$$

44. $b = a + 2c - \sqrt{3}$ 일 때, $a^2 + b^2 + 4c^2 - 2ab - 4bc + 4ca$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} b &= a + 2c - \sqrt{3} \text{ 에서 } a - b + 2c = \sqrt{3} \\ \therefore a^2 + b^2 + 4c^2 - 2ab - 4bc + 4ca \\ &= a^2 + (-b)^2 + (2c)^2 \\ &\quad + 2(a)(-b) + 2(-b)(2c) + 2(2c)(a) \\ &= (a - b + 2c)^2 \\ &= (\sqrt{3})^2 = 3 \end{aligned}$$

45. $x = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ 일 때, $x^4 - x^2 - y^4 + y^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-20\sqrt{2}$

해설

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}+1}, y = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \text{ 에서}$$

$$x = \sqrt{2}-1, y = \sqrt{2}+1$$

$$\begin{aligned} \therefore x^4 - x^2 - y^4 + y^2 &= x^4 - y^4 - (x^2 - y^2) \\ &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2) \\ &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1) \\ &= \left\{ (\sqrt{2}-1)^2 - (\sqrt{2}+1)^2 \right\} \\ &\quad \left\{ (\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+1)^2 - 1 \right\} \\ &= (-4\sqrt{2}) \times 5 \\ &= -20\sqrt{2} \end{aligned}$$

46. $p^7 = 1$ 일 때, $(1 - p) + (1 - p^2) + (1 - p^3) + \cdots + (1 - p^6)$ 의 값을 구하여라. (단, $p \neq \pm 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$p^7 - 1 = 0$ 이므로

$(p - 1)(p^6 + p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p + 1) = 0$ 에서

$p^6 + p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 = 0$ 이므로

$\therefore (1 - p) + (1 - p^2) + (1 - p^3) + \cdots + (1 - p^6)$

$= 6 - (p^6 + p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p)$

$= 6 - (-1)$

$= 7$

47. $a + b = 2, ab = -8$ 일 때, $a^3b + a^2b + ab^2 + ab^3$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -176

해설

$$\begin{aligned} & a^3b + a^2b + ab^2 + ab^3 \\ &= ab(a^2 + a + b + b^2) \\ &= ab\{(a+b)^2 - 2ab + a + b\} \\ &= (-8) \times \{2 - 2 \times (-8) + 2\} \\ &= (-8) \times (4 + 16 + 2) \\ &= -176 \end{aligned}$$

48. $a - b = 5$, $ab = -6$ 일 때, $a^3 - b^3 - a^2b + ab^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 65

해설

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 - a^2b + ab^2 &= a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 \\ &= a^2(a - b) + b^2(a - b) \\ &= (a^2 + b^2)(a - b) \\ &= \{(a - b)^2 + 2ab\}(a - b) \\ &= \{5^2 + 2 \times (-6)\} \times 5 \\ &= 65 \end{aligned}$$

49. $a + b = 3$, $ab = 1$ 일 때, $a^2(a - b) + b^2(b - a)$ 의 값은?

① 13

② 15

③ 17

④ 18

⑤ 20

해설

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 3^2 - 4 \times 1 = 5$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준식}) &= a^2(a - b) - b^2(a - b) \\ &= (a - b)(a^2 - b^2) \\ &= (a - b)^2(a + b) \\ &= 5 \times 3 = 15\end{aligned}$$

50. $a + b = 4$, $a - b = -2$ 일 때, $a^3 - b^3 + a^2b - ab^2 + a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -34

해설

$$\begin{aligned} & a^3 - b^3 + a^2b - ab^2 + a - b \\ &= a^2(a + b) - b^2(a + b) + (a - b) \\ &= (a + b)^2(a - b) + (a - b) \\ &= 4^2 \times (-2) + (-2) \\ &= -34 \end{aligned}$$