1. 다항식 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 을 전개하면?

① a^2-b^2
② a^3-b^3
③ a^3+b^3
④ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
⑤ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

해설

공식 : $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

2. $(x-2y-3z)^2$을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면?

① $x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6zx$
② $x^2-4xy+4y^2-9z^2+12yz-6zx$
③ $x^2-(4y+6z)x+4y^2+12yz+9z^2$
④ $4y^2+12yz+9z^2+(-4y-6z)x+x^2$
⑤ $9z^2+4y^2+x^2$

해설
$(x-2y-3z)^2=x^2-(4y+6z)x+4y^2+12yz+9z^2$

3. $(a-b-c)^2$ 을 옳게 전개한 것은?

① $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

② $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca$

③ $a^2-b^2-c^2-2ab-2bc-2ca$

④ $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

⑤ $a^2-b^2-c^2+2ab-2bc-2ca$

해설

$(a-b-c)^2$
$=a^2+(-b)^2+(-c)^2+2a(-b)+2(-b)(-c)+2(-c)a$
$=a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

4. 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ -1 ⑤ -2

해설
$y = -2x^2 + 4x + 1$
$\quad = -2(x-1)^2 + 3$
$x = 1$ 일 때, 최댓값 3을 갖는다.

5. 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최솟값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ 에서
$x = 1$ 일 때 최소이며 최솟값은 $f(1) = 1$

6. 다음 이차함수 중 최댓값을 갖지 않는 것은?

① $y=-x^2+1$

② $y=-10x^2-\frac{1}{3}$

③ $y=-2(x-1)^2$

④ $y=-\left(x-\frac{1}{5}\right)^2$

⑤ $y=3x^2+4$

해설

이차항의 계수가 음수일 때, 최댓값을 가진다.

7. 두 다항식 x^2+3x+a, x^2-3x+b의 최대공약수가 $x-1$일 때, 최소공배수를 구하여라.

① $x^3+3x^2-12x+8$　　② $x^3-3x^2+10x-8$

③ $x^3+x^2-10x+8$　　④ x^3-9x+8

⑤ $x^3+2x^2-8x+10$

해설

최대공약수는 두 식의 인수이므로 인수정리를 이용하여 a, b를 구한다.

$1+3+a=0$　$1-3+b=0$에서 $a=-4$　$b=2$

$\therefore\ \ x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

그러므로 두 다항식의 최소공배수는

$(x-1)(x-2)(x+4)=x^3+x^2-10x+8$

8. 두 다항식 $x^2 + ax + b$, $x^2 + 3bx + 2a$의 최대공약수가 $x - 1$일 때, $a + b$의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ −1 ⑤ −2

해설

최대공약수가 $x - 1$이므로
$x^2 + ax + b$와 $x^2 + 3bx + 2a$는
모두 $x - 1$로 나누어 떨어져야 한다.
$\therefore\ 1 + a + b = 0$이고 $1 + 3b + 2a = 0$
따라서, $a = -2,\ b = 1$
$\therefore\ a + b = -1$

9. 두 다항식 $f(x) = x^3 - ax + b, g(x) = x^2 + ax - 2b$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, $f(x), g(x)$ 의 최소공배수를 구하면?

① $(x-1)^2(x+1)(x+2)$
② $(x-1)^2(x+4)(x+2)$
③ $(x-1)(x+1)^2(x+2)$
④ $(x-1)(x+4)^2(x+2)$
⑤ $(x-1)(x+4)(x+2)^2$

해설

인수정리에 의해
$f(1) = 1 - a + b = 0$
$g(1) = 1 + a - 2b = 0$
연립하면, $a = 3, b = 2$
$\therefore f(x) = x^3 - 3x + 2$
조립제법을 이용하면,
$f(x) = (x-1)^2(x+2)$
$g(x) = x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$
$\therefore$ 최소공배수: $(x-1)^2(x+4)(x+2)$

10. n 이 자연수일 때, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^n = 0$ 을 만족하는 n 의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$n = 1$ 일 때,

$$\frac{\sqrt{2}}{1+i} + \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}(1-i) + \sqrt{2}(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$n = 2$ 일 때, $\dfrac{2}{(1+i)^2} + \dfrac{2}{(1-i)^2} = \dfrac{2}{2i} + \dfrac{2}{-2i} = 0$

그러므로 최솟값 $n = 2$

11. $i + i^3 + i^5 + i^7 + \cdots + i^{101} = a + bi$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

(좌변)$= i - i + i - i + \cdots + i = i$ 이므로
$i = a + bi$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a = 0,\ b = 1$
$\therefore\ a + b = 1$

12. $A = \dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때 $1 + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{100}$ 을 간단히 하면?

① 1　　② i　　③ 0　　④ -1　　⑤ $-i$

해설

$A = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = i$

$A^2 = i^2 = -1,\ A^3 = i^3 = -i,\ A^4 = i^4 = 1$

$\therefore\ 1 + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{100}$

$= 1 + (A + A^2 + A^3 + A^4) + \cdots$

$+(A^{97} + A^{98} + A^{99} + A^{100})$

$= 1 + (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1) + \cdots + (i - 1 - i + 1)$

$= 1$

13. $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 <u>아닌</u> 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 2　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 14

해설

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^{n} = i^n$$

$i^n = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m + 2$ $(m \geq 0)$

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

14. $z=\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$ 일 때, $z^4-\bar{z}$ 의 값을 구하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① $\sqrt{3}i$　　② $-\sqrt{3}i$　　③ $2\sqrt{3}i$

④ $-2\sqrt{3}i$　　⑤ 1

해설

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{-2}{1+\sqrt{3}i} \\
&= \frac{-2(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} \\
&= \frac{-2(1-\sqrt{3}i)}{4} \\
&= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}
\end{aligned}
$$

$\therefore\ 2z+1=\sqrt{3}i\cdots$①

①의 양변을 제곱하여 정리하면

$4z^2+4z+1=-3 \Leftrightarrow z^2+z+1=0\cdots$②

②의 양변에 $z-1$을 곱해주면

$(z-1)(z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow z^3=1$

$\therefore\ z^3=1$ 이므로 $z^4=z$

$$
\begin{aligned}
\therefore z^4-\bar{z} &= z-\bar{z} \\
&= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\
&= \sqrt{3}i
\end{aligned}
$$

15. $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\frac{1}{3\omega^2+4\omega+2} = a+b\omega$ 를 만족하는 실수 $a,\ b$ 의 값에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ $-\frac{4}{3}$

해설

$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$2\omega+1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱하면,

$4\omega^2+4\omega+4=0$

$\therefore\ \omega^2+\omega+1=0$

$$\begin{aligned} 3\omega^2+4\omega+2 &= 3(\omega^2+\omega+1)+\omega-1 \\ &= \omega-1 \end{aligned}$$

$\frac{1}{\omega-1} = a+b\omega$ 에서

$(a+b\omega)(\omega-1)=1$

$(a-2b)\omega-(a+b)=1 \leftarrow \omega^2=-\omega-1$

$\therefore\ a-2b=0,\ a+b=-1$ 에서

$a=-\frac{2}{3},\ b=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+b=-1$