

1. 다항식 $x^3 + ax + b$ 가 다항식 $x^2 - x + 1$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
 $x^2 = x - 1$ 을 대입하면
 $ax + (b - 1) = 0$
이 등식이 x 에 대한 항등식이므로,
 $a = 0, b - 1 = 0$
 $\therefore a = 0, b = 1$
 $\therefore a + b = 1$

해설

$x^3 + ax + b$
 $= (x^2 - x + 1)Q(x)$
 $= (x^2 - x + 1)(x + b)$
 $\therefore b = 1, a = 0$

2. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x+1$ 로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$ 로 나누면 나누어떨어진다고 한다. 이 때, $-3(m+n)$ 의 값은?

- ① 4 ② 8 ③ 12 ④ 14 ⑤ 18

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + mx^2 + nx + 1 \\ &= (x+1)Q(x) + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + mx^2 + nx + 1 \\ &= (x-2)Q'(x) \end{aligned}$$

$$\therefore f(-1) = -1 + m - n + 1 = 5$$

$$f(2) = 8 + 4m + 2n + 1 = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{6}, n = -\frac{29}{6}$$

$$\therefore m+n = -\frac{14}{3}, -3(m+n) = 14$$

3. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

- ① 1
- ② -1
- ③ $\sqrt{-1}$
- ④ $-\sqrt{-1}$
- ⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$\therefore j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$$

4. $x = \sqrt{3} + 2i$, $y = \sqrt{3} - 2i$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 5

② 7

③ $2\sqrt{3} + 4i$

④ 12

⑤ $12 + 2\sqrt{3}i$

해설

$$x + y = 2\sqrt{3},$$

$$xy = (\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i) = 3 - 4i^2 = 7 \text{ 이므로}$$

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 7 = 5 \text{ 이다.}$$

5. $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면
 $f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x-1)^2 + 1$
따라서 함수 $f(x)$ 는 점(1, 1)을 꼭지점으로 하는
아래로 볼록한 포물선이다.
그러므로 $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서
최솟값은 $x = 1$ 일 때 1이고,
최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

6. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x - y - z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x - 2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x + y)(x - y)(x^2 + xy - y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + 2x + 2y + 1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x - 2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

③ $(x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^6 - y^6$

⑤ $(x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + x + y + 1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

7. 다음 중에서 겹넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$

② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$

④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겹넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

대각선 : $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ $\therefore d = \sqrt{14}$

$= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

$= 6^2 - 22 = 14$

8. 등식 $(2k+1)y - (k+3)x + 10 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$(\text{준식}) = (y - 3x + 10) + (2y - x)k = 0$$

$$\therefore 2y = x, y - 3x = -10$$

$$\therefore x = 4, y = 2$$

$$\therefore x + y = 6$$

9. 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 나머지가 $4x+3$ 일 때 $f(2x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는?

① -1 ② 0 ③ 3 ④ 7 ⑤ 11

해설

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + 4x + 3$$

$$x=2 \text{를 대입하면 } f(2) = 11$$

$f(2x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지를 R 이라 하면

$$f(2x) = (x-1)Q'(x) + R$$

$$x=1 \text{을 대입하면 } f(2) = R$$

$$\therefore R = 11$$

10. a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = 0$ 을 만족하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

- ① $\angle B = 120^\circ$ 인 둔각삼각형 ② 직각삼각형
③ $\angle B = 150^\circ$ 인 둔각삼각형 ④ 이등변삼각형
⑤ $\angle A = 35^\circ$ 인 예각삼각형

해설

$$\begin{aligned} & a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b \\ &= a^2(b-c) + a(c+b)(c-b) + bc(b-c) \\ &= (b-c) \{a^2 + (c+b)a + bc\} \\ &= (b-c)(a+b)(a+c) \\ \therefore b &= c \quad (\because a+b \neq 0, a+c \neq 0) \end{aligned}$$

11. 일차식 $f(x)$ 와 이차식 $g(x)$ 의 최대공약수는 $x+1$ 이고, 두 식의 곱은 $f(x)g(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ 일 때, ab 의 값은?

- ① 0 ② 5 ③ 10 ④ 15 ⑤ 20

해설

최대공약수가 $x+1$ 이고 두 식의 곱이 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) = x+1, g(x) = (x+1)(x+c)$$

$$f(x)g(x) = (x+1)(x+1)(x+c)$$

$$= x^3 + (c+2)x^2 + (2c+1)x + c$$

$$= x^3 - x^2 + ax + b$$

$$\text{계수를 비교하면 } c+2 = -1, 2c+1 = a, b = c$$

$$\therefore c = -3, a = -5, b = -3$$

$$\therefore ab = 15$$

해설

$f(x)g(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ 는 $x+1$ 로 두 번 나누어 떨어진다.

조립제법으로 나누어 보면

$$-a + b - 2 = 0, a + 5 = 0$$

$$\therefore a = -5, b = -3 \text{이므로 } ab = 15$$

12. 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최대공약수가 $x+3$ 이고, 최소공배수가 x^3+4x^2+x-6 일 때 두 이차식을 구하면?

①	{	x^2+x-3		②	{	x^2+x-6
	}	x^2+5x+1			}	x^2+4x+3
③	{	x^2+x-2		④	{	x^2+2x-3
	}	x^2-x+3			}	x^2+5x+6
⑤	{	x^2+4x+3				
	}	x^2-x-6				

해설

$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x+2)(x+3)$
 두 이차식은 $(x-1)(x+3)$, $(x+2)(x+3)$ 에서
 x^2+2x-3 , x^2+5x+6

13. 두 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}} = a + bi$ 일 때, $\frac{1}{2}ab$ 의 값은?

(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-\sqrt{3}$

② $2\sqrt{3}$

③ $-3\sqrt{3}$

④ $4\sqrt{3}$

⑤ $-4\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}} \\ &= 4\sqrt{2}i + \sqrt{24} - \sqrt{8}i \\ &= 4\sqrt{2}i + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}i \\ &= 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}i \\ & a = 2\sqrt{6}, b = 2\sqrt{2} \\ & \therefore \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

14. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 \bar{z} 에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $z + \bar{z}$ 는 실수이다. ② $z = \bar{z}$ 이면 z 는 실수이다.
③ $z\bar{z} = 1$ 이면 $z^2 = 1$ 이다. ④ $z\bar{z} = 0$ 이면 $z = 0$ 이다.
⑤ $z\bar{z}$ 는 실수이다.

해설

복소수 z 와 그의 켤레복소수를 각각 $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ (a, b 는 실수)라 하면

① $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (참)

② $z = \bar{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi$
 $\Leftrightarrow 2bi = 0$
 $\Leftrightarrow b = 0$ (참)

③ $z\bar{z} = a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi \neq 1$ (거짓)
(반례) $a = 0, b = 1$ 일 때, $z^2 = -1$

④ $z\bar{z} = a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0, b = 0$ (참)

⑤ $z\bar{z} = a^2 + b^2$ (참)

15. 방정식 $(x-1)^2 + |x-1| - 6 = 0$ 의 두 근의 합은?

- ① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

$|x-1|$ 이 존재하므로 절댓값의 부호에 따라서

$x-1 \geq 0, x-1 < 0$ 으로 구간을 나누면

i) $x \geq 0$ 일 때, $|x-1| = x-1$

$$(x-1)^2 + (x-1) - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0 \therefore x = -2, 3$$

하지만 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$

ii) $x < 0$ 일 때, $|x-1| = -(x-1)$

$$(x-1)^2 - (x-1) - 6 = 0$$

$$(x-4)(x+1) = 0 \therefore x = -1, 4$$

하지만 $x < 0$ 이므로 $x = -1$

\therefore 두 근의 합은 $3 + (-1) = 2$

16. $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + 2bx + 3a = 0$ 를 동시에 만족하는 x 는 -1 밖에 없을 때, 상수 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$x = -1$ 은 두 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$,
 $x^2 + 2bx + 3a = 0$ 의 공통근이므로
 $1 - a + b = 0$, $1 - 2b + 3a = 0$
두 식을 연립하여 풀면
 $a = -3$, $b = -4$
 $\therefore ab = 12$

17. 조건 $x^2 - 2kx + k^2 + 2k + 3 = 0$ 의 두 근의 차가 2 를 만족하는 실수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

두 근을 $\alpha, \alpha + 2$ 라 하면
근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + 2 = 2k & \dots\dots\textcircled{1} \\ \alpha(\alpha + 2) = k^2 + 2k + 3 & \dots\dots\textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $\alpha = k - 1$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면,

$$(k - 1)(k + 1) = k^2 + 2k + 3$$

$$\therefore k = -2$$

18. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3 - 2i$, $3 + 2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2 - i$, $2 + i$ 라는 근을 구했을 때, $\left| \frac{bc}{a^2} \right|$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 52

해설

종섭이는 x 의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.

$$\text{두 근의 곱} = \frac{c}{a} = (3 - 2i)(3 + 2i) = 9 + 4 = 13$$

성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x 의 계수는 참이다.

$$\text{두 근의 합} = -\frac{b}{a} = 2 - i + 2 + i = 4$$

$$\therefore \left| \frac{bc}{a^2} \right| = \left| \frac{b}{a} \times \frac{c}{a} \right| = |-4 \times 13| = |-52| = 52$$

19. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + (k+3) = 0$ 의 두 근이 모두 음수일 때, 정수 k 의 최댓값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(i) 두 근이 실수이므로 $\frac{D}{4} \geq 0$

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 1 \cdot (k+3) \geq 0$$

$$k^2 - 7k + 6 \geq 0, (k-1)(k-6) \geq 0$$

$$\therefore k \leq 1, k \geq 6$$

(ii) 두 근의 합은 음수, 곱은 양수

$$2(k-3) < 0, k+3 > 0$$

$$\therefore -3 < k < 3$$

(i), (ii)에 따라 $-3 < k \leq 1$

\therefore 정수 k 의 최댓값은 1

20. 이차함수 $y = ax^2 + bx + 6$ 이 $x = 1$ 일 때 최솟값 5를 가진다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{aligned}y &= ax^2 + bx + 6 \\ &= a(x-1)^2 + 5 \\ &\quad (\because x = 1 \text{일 때, 최솟값 } 5 \text{를 가진다.}) \\ &= a(x^2 - 2x + 1) + 5 \\ &= ax^2 - 2ax + a + 5 \\ \therefore a + 5 &= 6, \quad -2a = b \\ \therefore a &= 1, \quad b = -2 \\ \therefore a + b &= 1 + (-2) = -1\end{aligned}$$

21. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3 \\ &= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2 \end{aligned}$$

따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$
 $g(a) = -(a-2)^2 + 6$ 에서
 $g(a)$ 의 최댓값은 6이다.

22. 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 7$, $x + y = 3$ 일 때, $x^5 + y^5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 123

해설

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \text{에서 } 3^2 = 7 + 2xy, xy = 1$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \text{에서 } x^3 + y^3 = 18$$

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) \\ &= 7 \times 18 - 1^2 \times 3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

23. 모든 실수 x 에 대하여 $x^{10} + 1 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{10}(x-1)^{10}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x = 2$ 을 대입하면

$$2^{10} + 1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \cdots \textcircled{2}$$

① + ②에 의해

$$2^{10} + 2 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10})$$

$$\therefore (a_0 + a_2 + \cdots + a_{10}) = 2^9 + 1 = 513$$

24. 세 실수 x, y, z 에 대하여 $[x, y, z] = xy^2 - y^2z$ 라 하자. $x - y = 2$, $xy - yz - zx = 1$ 이라 할 때, $[y, x, z] + [z, y, x]$ 의 값은?

- ① 0 ② -2 ③ 2 ④ -4 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} [y, x, z] &= yx^2 - x^2z, [z, y, x] = zy^2 - y^2x \\ [y, x, z] + [z, y, x] &= yx^2 - x^2z + zy^2 - y^2x \\ &= xy(x - y) - z(x^2 - y^2) \\ &= (x - y)(xy - yz - zx) \\ &= 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

25. 지상 22m 되는 위치에서 초속 30m 로 위로 던져 올린 공의 t 초 후의 높이를 h m 라 하면 $h = -5t^2 + 30t + 22$ 인 관계가 성립한다. 이 공은 몇 초 후에 최고 높이에 도달하는가?

- ① 1 초 ② 2 초 ③ 3 초 ④ 4 초 ⑤ 5 초

해설

$$\begin{aligned}h &= -5(t^2 - 6t + 9 - 9) + 22 \\ &= -5(t - 3)^2 + 67\end{aligned}$$

$$t = 3 \text{ 일 때, 최댓값 } h = 67$$