**1.** $\frac{a}{1-i}+\frac{b}{1+i}=5$를 만족하는 두 실수 $a,\ b$에 대하여 곱 $ab$의 값을 구하면?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

$\frac{a(1+i)}{2}+\frac{b(1-i)}{2}=5$

$a(1+i)+b(1-i)=10$,

$(a+b)+(a-b)i=10$

$a+b=10,\ a-b=0$

$2a=10,\ a=5,\ b=5,\ ab=25$

**2.** 복소수 $z$ 에 대하여 $z\bar{z} = 13$ , $z + \bar{z} = 4$ 일 때, 복소수 $z$ 는? (단, $\bar{z}$ 는 $z$ 의 켤레복소수이다.)

① $2 - 2i$　② $2 \pm 3i$　③ $2 \pm \sqrt{3}i$
④ $3 \pm 2i$　⑤ $4 \pm 3i$

해설

$z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로
$z\bar{z} = 13$ , $z + \bar{z} = 4$ 에서
$(a + bi)(a - bi) = 13$ , $(a + bi) + (a - bi) = 4$
$a^2 + b^2 = 13$ , $2a = 4$
$\therefore\ A = 2,\ b = \pm 3$
$z = 2 \pm 3i$

**3.** 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$ )

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅳ　⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
∴ 옳지 않다.
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
∴ 옳다.
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
∴ 옳지 않다.
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
∴ 옳다.

**4.** 실수가 아닌 복소수 $z$ 에 대하여 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 가 실수이기 위한 조건은? (단, $z \neq \pm i$ 이고 $\bar{z}$ 는 $z$ 의 켤레복소수이다.)

① $z \cdot \bar{z} = 1$  ② $z + \bar{z} = 0$

③ $z + \bar{z} = 1$  ④ $z + \bar{z} = -1$

⑤ $(z+1)(\bar{z}+1) = 1$

해설

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 가 실수이면

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$$\frac{z}{1+z^2} - \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2} = 0$$

$$\frac{z(1+\bar{z}^2) - \bar{z}(1+z^2)}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z}) - z\bar{z}(z-\bar{z})}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

$$\frac{(z-\bar{z})(1-z\bar{z})}{(1+z)(1+\bar{z}^2)} = 0$$

(분모)$\neq 0$ 이므로

(분자)$= (z-\bar{z})(1-z\bar{z}) = 0$

$z$ 가 실수가 아니므로 $z \neq \bar{z}$

$\therefore z\bar{z} = 1$

**5.** 실수 $k$ 에 대하여 복소수 $z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 를 정리하면
$z = 3k + 3i + 2ki = 3k + (3+2k)i$
이것이 순허수이려면 $3k = 0,\ 3 + 2k \neq 0$
$k = 0$ 이므로 $z = 3i,\ \bar{z} = -3i$
$\therefore z \cdot \bar{z} = 3i \cdot -3i = 9$

**6.** 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 $x, y, z$의 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \cdots$ ㉠, $yz-x=0 \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

$z$를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5,\ 5,\ 1),\ (4,\ 2,\ 2),\ (3,\ 1,\ 3)$ 3개

**7.** $x$, $y$가 양의 실수이고, $x^2 + xyi + y^2 - 5 - 2i = 0$일 때, $x + y$의 값을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$ )

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - 2)i = 0$

$x^2 + y^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉠

$xy - 2 = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$

$\therefore\ x + y = 3$ ($\because$ $x$, $y$ 는 양의 실수)

**8.** 다음 중 옳은 것은?

① $(1+\sqrt{-1})^3 = 2i+4$

② $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = 2i$

③ $(-\sqrt{-3})^2 = 3$

④ $(\sqrt{-5})^3 = 5\sqrt{5}i$

⑤ $\sqrt{-3}\sqrt{-9} = -3\sqrt{3}$

**해설**

① $-2+2i$

② $-2i$

③ $-3$

④ $-5\sqrt{5}i$

**9.** $A=\dfrac{1-i}{1+i}$ 일 때, $1+A+A^2+A^3+\ \cdots\ +A^{2005}$ 의 값은?

① $-i$ ② $1$ ③ $0$ ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$A=\dfrac{1-i}{1+i}=-i$

$1+A+A^2+A^3+\ A^4+\cdots+A^{2005}$

$=1+\{(-i)+(-1)+i+1\}+\cdots+(-i)$

$=1-i$

**10.** $i - 2i^2 + 3i^3 - 4i^4 + 5i^5 - 6i^6 + \cdots - 100i^{100} = a + bi$ 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① $-100$ ② $-50$ ③ $0$ ④ $25$ ⑤ $50$

해설

준식$= i + 2 - 3i - 4 + 5i + 6 - 7i - 8 + \cdots$
$= \{(1 + 5 + 9 + \cdots + 97) - (3 + 7 + \cdots + 99)\}\, i$
$+ \{(2 + 6 + \cdots + 98) - (4 + 8 + \cdots + 100)\}$
$= (1225 - 1275)i + (1250 - 1300) = -50 - 50i$ 따라서 $a = -50$,
$b = -50$ 이므로 $a + b = -100$

**11.** $a=1+i$ , $b=1-i$ 일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{ab}+\left(\frac{1}{b}\right)^2$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$a^2=(1+i)^2=2i,\ b^2=(1-i)^2=-2i$ ,

$ab=(1+i)(1-i)=2$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{ab}+\left(\frac{1}{b}\right)^2=\frac{b^2+ab+a^2}{a^2b^2}$$

$$=\frac{-2i+2+2i}{4}$$

$$=\frac{1}{2}$$

**12.** 복소수 $\alpha,\beta$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

② $\overline{\alpha^n}=(\overline{\alpha})^n$

③ $\overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}=\dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$(단, $\alpha \neq 0$)

④ $\overline{(\overline{\alpha})}=\alpha$

⑤ $\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}$ 이면 $\alpha$ 는 허수이다.

해설

⑤ (반례) $\alpha=2,\ \overline{\alpha}=2$

**13.** 복소수 $z$ 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, $z+3i=\overline{z-zi}$ 를 만족하는 복소수 $z$ 를 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$ )

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$z=a+bi$ 라 할 때,

(좌변): $z+3i=a+(b+3)i$

(우변): $z-zi=(a+bi)-(a+bi)i$

$=(a+b)+(b-a)i$

$\therefore\ \overline{z-zi}=(a+b)-(b-a)i$

(좌변) = (우변) 이므로,

$a+(b+3)i=(a+b)+(a-b)i$

$$\begin{cases} a+b=a \\ a-b=b+3 \Rightarrow a=3,\ b=0 \end{cases}$$

$\therefore\ z=3+0\cdot i=3$

**14.** 복소수 $z$ 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 $z$ 의 켤레복소수임)

| |
|---|
| ㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다. |
| ㉡ $z+\bar{z}=0$ 이면, $z$ 는 순허수이다. |
| ㉢ $z+\bar{z}$ 는 항상 실수이다. |
| ㉣ $z-\bar{z}$ 는 항상 순허수이다. |
| ㉤ $\frac{1}{z}$ 과 $\frac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다. |

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$

㉠ $z\bar{z}=a^2+b^2 \Rightarrow$ 실수

㉡ $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=0, a=0$

$\therefore\ z=bi \Rightarrow$ 순허수 ($\because\ z \neq 0$ 이므로 $b \neq 0$ )

㉢ $z+\bar{z}=2a \Rightarrow$ 실수

㉣ $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$

순허수로 판단하기 쉬우나, $b=0$ 인 경우

$z-\bar{z}=0$ 으로 순허수가 아니다.

㉤ $\frac{1}{z}=c+di$ 라면 $\frac{1}{\bar{z}}=\overline{\frac{1}{z}}=c-di$ 이므로 참

**15.** $w=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 일 때, $(w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$w=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ w^2+w+1=0,\quad w^3=1$

$\therefore\ (w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$

$=(w-2w-2)^2+(2w-w-1)^2$

$=(-w-2)^2+(w-1)^2$

$=w^2+4w+4+w^2-2w+1$

$=2w^2+2w+5$

$=2(w^2+w+1)+3$

$=3$