1. 두 복소수 $z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 에 대하여 $z_1+(2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 $a,\ b$ 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=8$

해설

$z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 를
$z_1+(2-4i) = z_2$ 에 대입하면
$1+(a-2)i+(2-4i) = (b-2)-ai$
$3+(a-6)i = (b-2)-ai$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$3 = b-2$, $a-6 = -a$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$b = 5,\ a = 3$
$\therefore\ a+b = 8$

2. $x = 3 + \sqrt{3}i$, $y = 3 - \sqrt{3}i$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 10 ③ 20 ④ -10 ⑤ -20

해설

$x + y = 6, \quad xy = 12$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ &= 6^3 - 3 \cdot 12 \cdot 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. 등식 $(1+i)z+(2z-3i)i=0$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $3+9i$　② $-3+9i$　③ $3-9i$
④ $\frac{3}{10}-\frac{9}{10}i$　⑤ $-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

해설
$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 로 놓으면
$(1+i)(a+bi)+\{2(a+bi)-3i\}i=0$
$(a+bi+ai-b)+(2ai-2b+3)=0$
$(a-3b+3)+(3a+b)i=0$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a-3b+3=0$, $3a+b=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-\frac{3}{10}$, $b=\frac{9}{10}$
$\therefore\ z=-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

4. 이차방정식 $x^2+7x+1=0$의 두 근이 α, β일 때, $(\alpha^2+\beta^2)+5(\alpha+\beta)$의 값을 구여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

이차방정식 $x^2+7x+1=0$의 두 근이 α, β이므로,
근과 계수와의 관계에 의해서
$\alpha+\beta=-7,\ \alpha\beta=1$
$(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-7)^2-2\cdot 1=47$
$\therefore\ 47+5\cdot(-7)=47-35=12$

5. 그래프의 모양이 $y = -2x^2$ 과 같고 $x = 1$ 일 때 최댓값 5 를 갖는다. 이때, 이 함수의 식은?

① $y = -2x^2 - 4x + 4$
② $y = -2x^2 - 4x + 5$
③ $y = -2x^2 + 4x - 3$
④ $y = -2x^2 + 4x + 3$
⑤ $y = -2x^2 - x + 5$

해설

꼭짓점의 좌표가 (1, 5), x^2 의 계수가 -2 이므로

$y = -2(x-1)^2 + 5$

$= -2(x^2 - 2x + 1) + 5$

$= -2x^2 + 4x + 3$

$\therefore y = -2x^2 + 4x + 3$

6. 다음 $\boxed{}$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3+4x^2+3x-2) \div (\boxed{}x^2+\boxed{}x+\boxed{}) = x+2$$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 1

▷ 정답: 2

▷ 정답: −1

해설

$\boxed{}x^2+\boxed{}x+\boxed{} = A$라 하면

$(x^3+4x^2+3x-2) \div A = x+2$

$\therefore\ A = (x^3+4x^2+3x-2) \div (x+2)$

$\therefore\ A = x^2+2x-1$이므로

$\boxed{}$안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, −1이다.

7. 다항식 $f(x)$ 를 $x+\frac{1}{3}$ 으로 나누었을 때, 몫과 나머지를 $Q(x)$, R 라고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $3x+1$ 으로 나눈 몫과 나머지를 구하면?

① $Q(x)$, R　　② $3Q(x)$, $3R$　　③ $3Q(x)$, R

④ $\frac{1}{3}Q(x)$, R　　⑤ $\frac{1}{3}Q(x)$, $\frac{1}{3}R$

해설

$$f(x)=Q(x)\left(x+\frac{1}{3}\right)+R=\frac{1}{3}Q(x)(3x+1)+R$$

8. 두 다항식 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$, $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하면?

① -21　② -15　③ -5　④ -1　⑤ 0

해설

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서
x^4 항의 계수는 x^3 의 계수와는 관계가 없다.
따라서 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 같다.
$\therefore\ a=b \quad \therefore\ a-b=0$

9. $f(x)=x^3-3x^2+2x+5$에 대하여 $f(x-1)=x^3+Ax^2+Bx+C$일 때, 상수$A\times B\times C$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

$f(x-1)=(x-1)^3-3(x-1)^2+2(x-1)+5$
$=x^3+Ax^2+Bx+C\cdots$㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로
양변에 $x=0,\ 1,\ 2$를 차례로 대입하면,
$x=0$일 때, $-1=C$
$x=1$일 때, $5=1+A+B+C$
$x=2$일 때, $5=8+4A+2B+C$
위의 세 식을 연립하여 풀면
$A=-6,\ B=11,\ C=-1$

10. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x+1, x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 각각 $4,\ -18$ 이라고 한다. $f(x)$ 를 $(x+1)(x+2)$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $x+4$ ② $x-4$ ③ $22x+26$
④ $22x-26$ ⑤ $x-18$

해설

$f(-1)=4,\ f(-2)=-18$
$f(x)=(x+1)(x+2)Q(x)+ax+b$
$-a+b=4,\ -2a+b=-18$
$\therefore\ a=22,\ b=26$

11. $a^2-b^2-c^2+2bc$의 인수가 아닌 것은?

① $a-b+c$ ② $a+b-c$ ③ $-a+b-c$

④ $-a+b+c$ ⑤ $-a-b+c$

해설

$$\begin{aligned} a^2-b^2-c^2+2bc &= a^2-(b^2+c^2-2bc) \\ &= a^2-(b-c)^2 \\ &= (a+b-c)(a-b+c) \end{aligned}$$

인수 : $(a+b-c)$, $(a-b+c)$(단, 복부호 동순)

12. 다음 중 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$의 인수인 것은?

① $2x + y - 2$　② $2x - y + 2$　③ $x - y + 1$

④ $x + y - 1$　⑤ $x - 2y - 1$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2 - (y + 4)x - y^2 + y + 2$

$= 2x^2 - (y + 4)x - (y + 1)(y - 2)$

$= \{2x + (y - 2)\}\{x - (y + 1)\}$

$= (2x + y - 2)(x - y - 1)$

13. $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$ ② $-(a+b+c)(a-b-c)$

③ $-(a+b)(b+c)(c+a)$ ④ $(a+b)(b+c)(c+a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c-a)$

해설

전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리한 후, 인수분해 한다.

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

14. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형　② 이등변삼각형
③ 정삼각형　④ 직각이등변삼각형
⑤ 둔각삼각형

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$에서
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$
$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)=0$
$\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$
$a,\ b,\ c$는 실수이므로
$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$
$\therefore\ a=b=c$
따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

15. 임의의 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 의 곱 $z\bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ 을 간단히 하면?

① $-y$ ② $-x$ ③ x ④ y ⑤ 0

해설

$z\bar{z} = 1$ 에서 $\frac{1}{z} = \bar{z} = x - yi$

$$\begin{aligned} \therefore\ \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2}\{(x+yi) + (x-yi)\} \\ &= \frac{1}{2} \times 2x \\ &= x \end{aligned}$$

16. $x = 2 + \sqrt{3}i$ 일 때, $x^3 \cdot \overline{x} - x \cdot \overline{x^3}$ 의 값은? (단, $\overline{x}$ 는 x 의 켤레복소수이다.)

① $13i$ ② $28\sqrt{3}i$ ③ $28i$

④ $56\sqrt{3}i$ ⑤ $72i$

해설

$x = 2 + \sqrt{3}i$ 에서 $\overline{x} = 2 - \sqrt{3}i$ 이므로

$$x^3 \cdot \overline{x} - x \cdot \overline{x^3} = x\overline{x}(x^2 - \overline{x^2}) = x\overline{x}(x + \overline{x})(x - \overline{x})$$

$$= 7 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3}i = 56\sqrt{3}i$$

17. 이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 두 근이 $a-1,\ b-1$일 때, ab의 값은?

① 0　　② 2　　③ 4　　④ 6　　⑤ 8

해설

$x^2-ax+b=0$의 두 근이 $a-1,\ b-1$이므로
두 근의 합은 $a+b-2=a$
$b-2=0$ 이므로 $b=2$
두 근의 곱은
$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)&=ab-a-b+1\\&=2a-a-2+1=a-1=2\end{aligned}$$
따라서 $a=3$ 따라서 $ab=2\ \cdot 3=6$

18. 다음은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(c \neq 0)$ 의 두 근이 α, β 일 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식을 구하는 과정이다.

> $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하는 이차항의 계수가
> 1 인 이차방정식은 $x^2 + [(가)]x + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$
> 근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$
> 이므로 구하는 방정식은 $x^2 + [(나)]x + \frac{a}{c} = 0$
> 이것을 정리하면 $[(다)] = 0$ 이다.

위의 풀이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $-\frac{b}{c}$, cx^2-bx+a
② $-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $\frac{b}{c}$, cx^2+bx+a
③ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $-\frac{b}{c}$, cx^2-bx+a
④ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $\frac{b}{c}$, cx^2+bx+a
⑤ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $\frac{b}{c}$, cx^2-bx+a

해설

(가)는 $-$(두 근의 합) 이므로 $-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$ $\therefore$ $-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$

$-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right) = -\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c}$ ← (나)

$x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$

$cx^2+bx+a=0$ ← (다)

19. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2+px+q=0$ 의 한 근이 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = 2-\sqrt{3}$ 이므로,
두 근은 $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$
$p = -$(두근의 합) $= -4$
$q =$ (두근의 곱) $= 1$
$\therefore p+q = -3$

20. 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-2k-3=0$의 두 근이 모두 음수 일 때, k의 범위를 구하면?

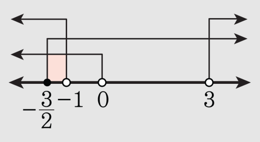
① $-\frac{3}{2} \le k < -1$　　② $-\frac{3}{2} < k < 0$

③ $-1 < k < 0$　　④ $-1 < k < 3$

⑤ $k < 0$ 또는 $k > 3$

해설

(i) 판별식이 0보다 크거나 같다.
$D' = k^2-(k^2-2k-3) \ge 0$에서
$k \ge -\frac{3}{2}$
(ii) 두 근의 곱은 0보다 크다.
$k^2-2k-3>0$에서 $(k+1)(k-3)>0$
$\therefore k<-1$ 또는 $k>3$
(iii) 두 근의 합이 0보다 작다.
$2k<0 \therefore k<0$



공통범위를 구하면, $-\frac{3}{2} \le k < -1$

21. 축의 방정식이 $x=3$ 이고, 점 $(2,\ 5)$ 를 지나고, y 절편이 37 인 이차함수의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

축의 방정식이 $x=3$ 이므로
$y=a(x-3)^2+q$
점 $(2,\ 5)$ 와 y 절편 $(0,\ 37)$ 를 지나므로
$5=a+q,\ 37=9a+q$
$a=4,\ q=1$
$\therefore\ y=4(x-3)^2+1$
따라서 $x=3$ 일 때, 최솟값은 1 이다.

22. 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하면? (단, $a < c$)

$$(x-a)^2(bx-x^2-1) = (x-c)^2(dx-x^2-1)$$

① -4 ② 4 ③ 5 ④ -5 ⑤ 0

해설

$a < c$에서 $a \neq c$이므로 주어진 등식에서
$x^2 - bx + 1 = (x-c)^2 \quad \therefore\ b = 2c,\ 1 = c^2$
$x^2 - dx + 1 = (x-a)^2 \quad \therefore\ d = 2a,\ 1 = a^2$
$\therefore\ a = -1,\ b = 2,\ c = 1,\ d = -2$
$\therefore\ a + b + c + d = 0$

23. 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 5이고, 몫 $Q(x)$를 다시 $x+3$으로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는?

① 10 ② -10 ③ 9 ④ -9 ⑤ 8

해설

나머지정리에 의해 $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는 $f(-3)$이다.
$f(x)=(x-2)Q(x)+5$에서
$x=-3$을 대입하면 $f(-3)=(-3-2)Q(-3)+5$
$Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 $Q(-3)=3$
$\therefore\ f(-3)=-10$

24. 이차식 $f(x)$를 각각 $x-3, x+1$로 나눈 나머지는 같고, $f(1)=0$일 때, $\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{n}{m}$ ($m,\ n$은 서로소)이다. 이 때, $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$\therefore\ f(x)=(x-1)(ax+b)$

$f(3)=f(-1)$ 이므로 $2(3a+b)=-2(-a+b)$

$\therefore\ a=-b$

$\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)}=\frac{-9b}{-25b}=\frac{9}{25}$

$\therefore\ m=25,\ n=9$

25. $x^2 - xy + y^2 + 2y = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면
$y^2 + (2-x)y + x^2 = 0$
이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.
$D = (2-x)^2 - 4 \cdot x^2 \geq 0$,
$3x^2 + 4x - 4 \leq 0$, $(x+2)(3x-2) \leq 0$
$\therefore -2 \leq x \leq \frac{2}{3}$
따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.