1. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 10 은 10 의 약수이면서 10 의 배수이다.

② 모든 자연수는 자기 자신의 약수인 동시에 배수이다.

③ 1 은 모든 자연수의 배수이다.

④ 384 은 6 의 배수이다.

⑤ 9 는 54 의 약수이다.

해설

1 은 모든 자연수의 약수이다.

2. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 3 은 소수이다.

② 1 과 그 수 자신만의 약수를 가지는 자연수를 소수라 한다.

③ 가장 작은 소수는 1 이다.

④ 2 의 배수 중 소수는 1 개이다.

⑤ 소수는 약수가 2 개이다.

해설

가장 작은 소수는 2이다.

3. 49의 소인수와 42의 소인수를 모두 구한 것은?

① $2,\ 3,\ 7$ ② $2,\ 3,\ 7^2$ ③ $7^2,\ 21$

④ $2,\ 7,\ 21$ ⑤ $6,\ 7$

해설

$49 = 7^2$ 이므로 49의 소인수는 7,

$42 = 2 \times 3 \times 7$ 이므로 42의 소인수는 $2,\ 3,\ 7$이다.

따라서 두 수의 소인수를 모두 구하면, $2,\ 3,\ 7$이다.

4. 자연수 $2^3 \times 3^a$ 의 약수의 개수가 12 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(3+1)(a+1) = 12$

$a+1 = 3$

$\therefore\ a = 2$

5. $\square \times 3^3$ 은 약수의 개수가 8 개인 자연수이다. 다음 중 $\square$ 안에 알맞은 수 중 가장 작은 것을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$8 = (3+1) \times (1+1)$ 이므로

$\square = a$ (a 는 소수),

가장 작은 소수는 2 ,

$\therefore \square = 2$

6. 세 수 $2^2 \times 3^3 \times 7$, $2^3 \times 5^2 \times 7$, $2^3 \times 5^4 \times 7^3$ 의 최대공약수는?

① $2^3 \times 5^3$ ② $2^3 \times 3^2$ ③ $3^2 \times 5^2$

④ $2^2 \times 7$ ⑤ $3^3 \times 7^3$

해설

$2^2 \times 3^3 \times 7$, $2^3 \times 5^2 \times 7$, $2^3 \times 5^4 \times 7^3$ 에서
최대공약수 : $2^2 \times 7$ (지수가 작은 쪽)

7. $2^3 \times 3^2 \times 7,\ 210,\ 252$ 의 공약수가 아닌 것은?

① 2×3 ② 7 ③ 14

④ 21 ⑤ $2 \times 3 \times 5$

해설

$2^3 \times 3^2 \times 7,\ 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7,\ 252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ 의 최대공약수는 $2 \times 3 \times 7$

공약수는 최대공약수의 약수이므로

주어진 세 수의 공약수는 $1,\ 2,\ 3,\ 2 \times 3,\ 7,\ 2 \times 7,\ 3 \times 7,\ 2 \times 3 \times 7$ 이다.

8. 청소년을 위한 마라톤이 이번 일요일에 개최된다. 마라톤을 하는 중간에 물은 6km 지점마다, 수건은 8km 지점마다 준비된다고 한다. 마라톤이 시작되고 3km 지점에 물과 수건이 처음으로 준비된 후, 다음에 처음으로 물과 수건이 함께 준비된 것은 몇 km 후인지 나눗셈을 이용하여 구하여라.

▶ 답 : _____ km

▷ 정답 : 27 km

해설

6 과 8 의 최소공배수를 나눗셈을 이용하여 구하면 된다. 최소공배수는 24 이므로 물과 수건이 함께 준비된 것은 $3 + 24 = 27(\text{km})$ 이다.

$$\begin{array}{r|ll} 2 & 6 & 8 \\ \hline & 3 & 4 \end{array}$$

9. 두 자연수 A 와 $2^3 \times 3^2 \times 5$ 의 최소공배수가 $2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 일 때, 가능한 A 의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$A = a \times b \times c \times d$ 라 하면

$$\begin{array}{l} 2^3 \times 3^2 \times 5 \\ a \times b \times c \times d \\ \hline 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7 \end{array}$$

$\therefore\ a = 2^5,\ b = 1,\ 3, 3^2,\ c = 1,\ 5,\ d = 7$

따라서, A 는 $2^5 \times 7,\ 2^5 \times 5 \times 7,\ 2^5 \times 3 \times 7$,

$2^5 \times 3 \times 5 \times 7,\ 2^5 \times 3^2 \times 7,\ 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 의 6 개이다.

10. 두 수 A 와 B 의 최소공배수는 12 이고, 12 와 C 의 최소공배수는 24 이다. 세 수 A , B , C 의 공배수로 알맞은 것을 모두 고르면?(정답 2 개)

① 12 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 60

해설

A 와 B 의 최소공배수는 12 이고, 두 수의 최소공배수인 12 과 C 의 최소공배수가 24 이므로, 세 수 A , B , C 최소공배수는 24 이다. 따라서 A , B , C , D 의 공배수는 24 의 배수이다.

11. 검은 펜 70 개, 빨간 펜 100 개, 파란 펜 130 개를 지영이네 반 학생들에게 똑같이 나누어주었더니 검은 펜이 6 개, 빨간 펜이 4 개, 파란 펜이 2 개 남았다. 지영이네 반 학생은 30 명 이상이라고 할 때, 지영이네 반 학생 수를 구하여라.

① 30 명 ② 32 명 ③ 34 명 ④ 36 명 ⑤ 38 명

해설

70 보다 6 작은 수, 100 보다 4 작은 수, 130 보다 2 작은 수는 어떤 수로 나누어 떨어진다. 그러므로 64, 96, 128 의 공약수 중, 30 이상인 수를 구한다.

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 64 & 96 & 128 \\ \hline 2 & 32 & 48 & 64 \\ \hline 2 & 16 & 24 & 32 \\ \hline 2 & 8 & 12 & 16 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 8 \\ \hline & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

최대공약수 : $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

최대공약수인 32 의 약수 중 30 보다 큰 수는 32 이다. 따라서 지영이네 반 학생 수는 32 명이다.

12. 운동장을 한 바퀴 도는데 A 는 42 초 걸리고, B 는 36 초가 걸린다고 한다. A 와 B 가 같은 지점에서 같은 방향으로 출발해서 A 가 a 바퀴, B 가 b 바퀴 돈 후에, 처음 출발한 곳에서 다시 만났다. $a \times b$ 의 값은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 42

해설

두 사람이 출발한 곳에서 처음 다시 만날 때까지 걸리는 시간은 42 와 36 의 최소공배수 252 이다.
A 는 $252 \div 42 = 6$(바퀴) , B 는 $252 \div 36 = 7$(바퀴) 이다.
$\therefore 42$

13. 서로 맞물려 돌아가는 두 톱니바퀴 A, B의 톱니의 수는 각각 48개, 32개이다. 톱니가 같은 이에서 처음으로 다시 맞물리기 위해 톱니바퀴 A, B가 각 각 회전해야 하는 수를 a, b라 할 때 $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

두 톱니바퀴가 원래 모양이 되기까지 돌아간 톱니의 개수는 48과 32의 최소공배수인 96이므로 톱니바퀴 A는 $96 \div 48 = 2$(번) 회전해야 하고, 톱니바퀴 B는 $96 \div 32 = 3$(번) 회전해야 하므로 $a+b = 2+3 = 5$

14. 가로, 세로의 길이가 각각 12 cm, 20 cm 인 직사각형 모양의 카드를 늘어 놓아 가장 작은 정사각형을 만들려고 한다. 이때, 카드는 총 몇 장이 필요한가?

① 10 장 ② 12 장 ③ 13 장 ④ 15 장 ⑤ 17 장

해설

정사각형의 한 변의 길이는 12 와 20 의 최소공배수인 60 cm 이다. 가로는 $60 \div 12 = 5$ (장), 세로는 $60 \div 20 = 3$ (장) 이 필요하므로 필요한 카드의 수는 $5 \times 3 = 15$ (장) 이다.

15. 자연수 A 와 27 의 최대공약수는 9 이고, 최소공배수는 108일 때, 자연수 A 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

$$9) \begin{array}{cc} A & 27 \\ \hline a & 3 \end{array}$$

A 와 27 의 최소공배수가 108 이므로

$9 \times a \times 3 = a \times 27 = 108$

$a = 108 \div 27 = 4$

$\therefore\ A = 4 \times 9 = 36$

[별해] 두 자연수 A, B 의 최대공약수와 최소공배수의 곱은 두 자연수의 곱인 $A \times B$ 와 같다.

$A \times 27 = 9 \times 108$

$\therefore\ A = 9 \times 108 \div 27 = 36$

16. $\frac{12}{7}, \frac{36}{5}, \frac{15}{4}$ 의 어느 것에 곱하여도 양의 정수가 되는 분수 중 가장 작은 수는?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{100}{3}$ ④ $\frac{120}{3}$ ⑤ $\frac{140}{3}$

해설

7, 5, 4 의 최소공배수 : 140

12, 36, 15 의 최대공약수 : 3

따라서, 구하는 분수는 $\frac{140}{3}$ 이다.

17. 민수는 15 층 아파트에서 살고 있는데, 엘리베이터가 자주 고장이 난다. 어느 날 엘리베이터 입구에 '약수의 개수가 1 개 또는 3 개 이상인 층에서만 섭니다.' 라는 문구가 적혀 있었을 때, 엘리베이터가 서는 층은 모두 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

약수의 개수가 1 개인 수는 1 뿐이다. 약수가 3 개 이상인 수는 합성수이므로 15 층 아래에 있는 합성수는 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15 로 8 개이다. 따라서 약수의 개수가 1 개 또는 3 개 이상인 수는 모두 9 개이다.

18. $24 \times a$ 가 어떤 자연수 A 의 제곱이 될 때, A 의 최솟값은?

① 9 ② 12 ③ 36 ④ 54 ⑤ 100

해설

$24 \times a = 2^3 \times 3 \times a$

가장 작은 $a = 2 \times 3 = 6$

$A^2 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = (12)^2$

$\therefore A = 12$

19. 자연수 x, y 에 대하여 $\dfrac{2^2 \times 5}{x} = y^2$ 을 만족하는 x 의 값을 모두 구하면?

① $1, 4$ ② $4, 5$ ③ $5, 20$

④ $4, 5, 20$ ⑤ $1, 2, 4, 5, 20$

해설

$\dfrac{2^2 \times 5}{x} = y^2$ 을 만족하는 자연수 x 는 $5, 5 \times 2^2$ 이다.

20. 약수의 개수가 12 개인 가장 작은 자연수를 구하면?

① 12 ② 18 ③ 24 ④ 36 ⑤ 60

해설

$12 = 2 \times 2 \times 3$ 이므로

$(1+1) \times (1+1) \times (2+1)$ 에서 $2^2 \times 3 \times 5 = 60$

21. 가로의 길이가 72cm , 세로의 길이가 96cm , 높이가 120cm 인 직육면체를 남김없이 잘라 똑같은 크기의 정육면체로 나누려고 한다. 되도록 적은 개수의 정육면체를 만들 때, 만들 수 있는 정육면체는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 60 개

해설

72, 96, 120 의 최대공약수는 24 이므로 만들 수 있는 정육면체의 모서리의 길이는 (24의 약수)cm 이다. 정육면체의 한 모서리의 길이가 길수록 정육면체의 개수는 적으므로 한 모서리의 길이는 24(cm) 이다.

$\therefore$ (정육면체의 갯수)

$= (72 \div 24) \times (96 \div 24) \times (120 \div 24)$

$= 3 \times 4 \times 5 = 60$(개)

22. 1부터 100까지의 자연수 중에서 2, 3, 4 로 나누었을 때 그 나머지가 각각 1, 2, 3 이 되는 수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8개

해설

2, 3, 4 로 나누었을 때 그 나머지가 1, 2, 3 이 되는 수는 (2, 3, 4로 나누어 떨어지는 수) – 1 이므로
(2, 3, 4의 최소공배수인 12의 배수) –1 을 1 부터 100 까지의 자연수 중에서 구하면 $12-1=11$, $24-1=23$, $\cdots$, $12\times8-1=95$ 까지 8개이다.

23. 두 자연수 A, B 가 $\frac{A}{2} = \frac{B}{3}$ 를 만족하고 A, B 최대공약수와 최소공배수의 곱이 150 이다. 이때, A, B 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $A = 10$

▷ 정답: $B = 15$

해설

$A = 2k$, $B = 3k$, 두 수의 최대공약수를 G, 최소공배수를 L 이라 하면 $A \times B = L \times G$ 이므로

$2k \times 3k = 150$, $k^2 = 25$, $k = 5$ 이다.

$\therefore\ A = 10$, $B = 15$

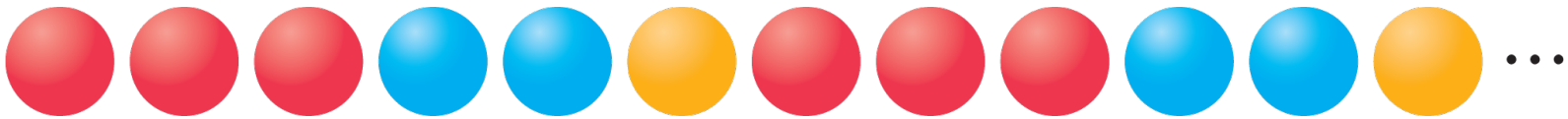
24. $\frac{12}{n}$, $\frac{56}{n}$, $\frac{32}{n}$ 를 자연수로 만드는 자연수 n 들을 모두 곱하면?

① 12 ② 10 ③ 8 ④ 7 ⑤ 6

해설

n 은 12, 56, 32 의 공약수, 공약수는 최대공약수의 약수이므로
12, 56, 32 의 최대공약수는 4 이다.
4 의 약수는 1, 2, 4 이다.
따라서 8 이다.

25. 바둑돌을 다음과 같이 배열하였다. 왼쪽에서부터 50 번째까지의 빨간 바둑돌은 몇 개인가?



① 21 개 ② 23 개 ③ 25 개 ④ 26 개 ⑤ 28 개

해설

빨간 바둑돌은 3 개씩, 파란 바둑돌은 2 개씩, 노란 바둑돌은 1 개씩 반복된다. 따라서 다시 빨간 바둑돌이 다시 배열 될 때까지는 총 6 개의 바둑돌이 필요하다. 따라서 6 개씩 반복된다. $50 = 6 \times 8 + 2$ 이므로 50 번째까지 빨간 바둑돌의 개수는 3 개씩 8 번이 반복되고 2 개가 더 배열된다. 따라서 26 개이다.

26. $126 = a^l \times b^m \times c^n$ 으로 소인수분해될 때, $a+b+c-l-m-n$ 의 값을 구하여라. (단, $a < b < c$ 인 소수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$126 = 2 \times 3^2 \times 7 = a^l \times b^m \times c^n$

$\therefore\ a = 2,\ b = 3,\ c = 7,\ l = 1,\ m = 2,\ n = 1$

$\therefore\ a+b+c-l-m-n = 2+3+7-1-2-1 = 8$

27. 자연수 $2^a \times 3^b$ 에 24 를 곱하였더니 어떤 자연수의 제곱이 되었다. 이때, 가능한 a, b 중 가장 작은 a, b 를 올바르게 구한 것을 골라라.

① $a : 0, b : 0$ ② $a : 0, b : 1$ ③ $a : 1, b : 1$

④ $a : 1, b : 0$ ⑤ $a : 2, b : 1$

해설

$2^a \times 3^b$ 이 자연수이려면 a 와 b 는 0 이상이어야 한다.
또, 어떤 자연수의 제곱이 되는 수는 소인수분해를 했을 때 모든 소인수의 지수가 짝수여야 한다. 따라서, $2^a \times 3^b$ 에 $24 = 2^3 \times 3$ 를 곱한 수가 어떤 자연수의 제곱이 되어야 하므로, $2^a \times 3^b \times 2^3 \times 3 = 2^a \times 2^3 \times 3^b \times 3 = 2^{a+3} \times 3^{b+1}$ 에서 2 의 지수인 $(a+3)$ 과 3 의 지수인 $(b+1)$ 이 모두 짝수여야 한다. 이를 만족하는 가장 작은 수 a, b 는 각각 1 과 1 이다.

28. 1188 의 약수 중에서 11 과 서로소인 약수들의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 280

해설

$1188 = 11 \times 108 = 11 \times 4 \times 27 = 2^2 \times 3^3 \times 11$

11 과 서로소인 약수는 1188 의 약수 중 인수가 2 와 3 으로 이루어진 수이다.

→ 즉, $2^2 \times 3^3$ 의 약수이다.

∴ (11 과 서로소인 약수들의 총합) $= 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 9 + 12 + 18 + 27 + 36 + 54 + 108 = 280$

29. 두 자연수 $21 \times x$ 와 $15 \times x$ 의 공약수가 4 개일 때 x 의 값이 될 수 있는 한 자리의 자연수는 모두 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$21 \times x = 3 \times 7 \times x$, $15 \times x = 3 \times 5 \times x$
두 수의 최대공약수는 $3 \times x$,
공약수, 즉 최대공약수의 약수가 4 개이므로
최대공약수는 $a \times b$ (단, a, b 는 소수, $a \neq b$) 또는 a^3 꼴이어야 한다.
따라서 x 가 될 수 있는 수는 2, 5, 7, 9 의 4 개이다.

30. 다음 조건을 모두 만족하는 자연수 n 중 가장 작은 수를 구하여라.

(1) n 은 5 의 배수인 세 자리 자연수이다.

(2) n 과 168 의 최대공약수는 24 이다.

(3) n 을 15 로 나누면 어떤 자연수의 제곱수가 된다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

(1) n 은 5 의 배수인 세 자리 자연수이다. $\rightarrow$ n 은 5 의 인수를 가진다.

(2) n 과 168 의 최대공약수는 24 이다.

$168 = 2^3 \times 3 \times 7$, $24 = 2^3 \times 3 \rightarrow n$ 은 $2^3 \times 3$을 인수로 가지고 7 은 인수로 가지지 않는다.

(3) n 을 15 로 나누면 어떤 자연수의 제곱수가 된다.

$15 = 3 \times 5 \rightarrow n$ 은 인수 $3, 5$ 의 지수가 홀수이고 나머지 인수의 지수는 짝수인 수이다.

$\therefore n$ 중 가장 작은 수$=2^4 \times 3 \times 5 = 240$