1. 부등식 $x-1 \le 3x-7 < 14-x$ 의 해 중에서 정수인 해는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$x-1 \le 3x-7 < 14-x$ 에서

(i) $x-1 \le 3x-7$

$x-3x \le -7+1$

$-2x \le -6$

$\therefore \ x \ge 3$

(ii) $3x-7 < 14-x$

$3x+x < 14+7$

$4x < 21$

$\therefore \ x < \dfrac{21}{4}$

(i), (ii) 에서 $3 \le x < \dfrac{21}{4}$ 따라서 정수인 해는 3, 4, 5 로 3 개이다.

2. 복소수 z의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$ 를 만족시키는 복소수 z 는?

① 존재하지 않는다.
② 단 한 개 있다.
③ 두 개 뿐이다.
④ 세 개 뿐이다.
⑤ 무수히 많다.

해설

$z=a+bi$ 라 하면 $\bar{z}=a-bi$ (단, a, b 는 실수)

$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$

$2a+2bi+3ai-3b+2a-2bi-3ai-3b=2$

$4a-6b=2 \qquad \therefore\ 2a-3b=1$

$2a-3b=1$ 을 만족하는 실수 a, b 의 순서쌍은 무수히 많으므로

주어진 조건을 만족하는 복소수 z 는 무수히 많다.

3. $x^2-4kx+(5-k^2)=0$이 두 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$D/4 = 4k^2 - (5-k^2) \geq 0$

$4k^2 - 5 + k^2 \geq 0,\ 5k^2 \geq 5,\ \therefore k^2 \geq 1$

$\alpha + \beta = 4k,\quad \alpha\beta = 5 - k^2$

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 16k^2 - 10 + 2k^2 \\ &= 18k^2 - 10\end{aligned}$$

$18k^2 \geq 18,\ 18k^2 - 10 \geq 18 - 10$

$\alpha^2 + \beta^2 \geq 8,\ \therefore$ (최솟값)$= 8$

4. p가 실수일 때, 두 이차방정식 $x^2+px+3=0$, $x^2+3x+p=0$이 오직 한 개의 공통근 α를 갖는다고 한다. 이 때, $\alpha-p$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\alpha^2+p\alpha+3=0$

$\alpha^2+3\alpha+p=0$

$\alpha(p-3)-(p-3)=(\alpha-1)(p-3)=0$

$\alpha=1$ or $p=3$

$p=3$ 이면 두 다항식이 같아지므로 $\alpha=1$

$\therefore 1+p+3=0 \quad \therefore\ p=-4$

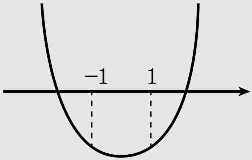
$\therefore\ \alpha-p=1-(-4)=5$

5. 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2p-1=0$ 의 두 근 중 한 근은 -1 보다 작고, 다른 한 근은 1 보다 크도록 실수 p 의 범위를 정하면?

① $p>-\frac{1}{3}$　② $p>1$　③ $-\frac{1}{3}<p<1$
④ $p<-\frac{1}{3}$　⑤ $p<1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2p-1$ 로 놓으면



ⅰ) $f(-1)=1+p+1+2p-1=3p+1<0$

$\therefore p<-\frac{1}{3}$

ⅱ) $f(1)=1-p-1+2p-1=p-1<0$

$\therefore p<1$

ⅰ) ⅱ)에서 $p<-\frac{1}{3}$