

1. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은?

① $f: x \rightarrow x$

② $f: x \rightarrow -2|x|$

③ $f: x \rightarrow x^2$

④ $f: x \rightarrow x+3$

⑤ $f: x \rightarrow |3x|+1$

해설

③ $y = f(x) = x^2$ 에서

$f(-1) = (-1)^2 = 1 \in Y$, $f(0) = 0^2 = 0 \in Y$, $f(1) = 1^2 = 1 \in Y$
따라서 함수이다.

2. 실수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$ 이고 f 가 일대일대응일 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

0이 아닌 x 에 대하여 $y = 0$ 을
 $f(xy) = f(x)f(y)$ 에 대입하자.
 $f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$
 $\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ 또는 $f(x) = 1$
만일 $f(x) = 1$ 이면
 $f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 1, \dots$ 이다.
위는 $f(x)$ 가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
 $f(x) = 1$ 은 부적당
 $\therefore f(0) = 0$

3. 0 이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

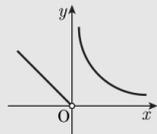
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \quad \text{일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?}$$

- I. $f(f(3)) + f(f(-3)) = \frac{10}{3}$
 II. $f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$
 III. $x_1 > x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

- ① I ② III ③ I, II ④ II, III ⑤ I, III

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



I. $f(f(3)) + f(f(-3)) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f(3)$
 $= 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ -<참>

II.
 i) $x > 0$ 일 때, $-x < 0, \frac{1}{x} > 0$ 이므로

$$f(-x) = -(-x) = x,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

ii) $x < 0$ 일 때, $-x > 0, \frac{1}{x} < 0$ 이므로

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x}$$

i), ii) 에서 $f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ -<참>

III. 반례) $\frac{1}{3} > -2$ 일 때,

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 > 2 = f(-2) \text{ -<거짓>}$$

따라서 옳은 것은 I, II 이다.

4. 실수를 원소로 갖는 집합 X 가 정의역인 두 함수 $f(x) = x^2$ 과 $g(x) = x^3 - 2x$ 가 같을 때, X 의 개수는 몇 개인가?

- ① 3개 ② 4개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

두 함수의 정의역은 같으므로 $f(x) = g(x)$ 에서
 $x^2 = x^3 - 2x$, $x^3 - x^2 - 2x = 0$
 $x(x+1)(x-2) = 0$, $x = -1, 0, 2$
 $\therefore X = \{-1, 0, 2\}$
따라서 X 의 공집합을 제외한
부분집합이 되므로 7개

5. 집합 $X = \{-1, 1, -i, i\}$ 에 대하여 $f : X \rightarrow Y$ 인 함수 $f(x) = x^3$ 의 치역을 구하여 모든 원소를 각각 제공하여 모두 합하면?

- ① -1 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

치역 $Y = \{-1, 1, i, -i\}$ 이다.

모든 원소를 제공하여 더하면

$$(-1)^2 + 1^2 + (-i)^2 + i^2 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$