1. 등식 $3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$이 x에 대한 항등식이 될 때, $a-b+c$의 값은?

① 6 ② 5 ③ 3 ④ 1 ⑤ 0

해설

우변을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$ax^2-(2a-b)x+a-b+c=3x^2+2x+1$

계수를 비교하면

$a=3,\ 2a-b=-2,\ a-b+c=1$

$a=3,\ b=8,\ c=6$

$a-b+c=3-8+6=1$

해설

양변에 $x=0$을 대입하면 $1=a-b+c$

2. x 에 대한 다항식 $A = 2x^3 + 5x^2 + 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x + 1$ 이고, 나머지가 $-6x + 2$ 이다. 이 때, 다항식 B 를 구하면?

① $x^2 + 2x + 2$ ② $x^2 + x + 2$ ③ $x^2 - x + 2$

④ $x^2 - 2x + 2$ ⑤ $x^2 - 3x + 2$

해설

$A = B(2x + 1) - 6x + 2$ 에서

$B(2x + 1) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2$

$\therefore B = (2x^3 + 5x^2 + 6x + 2) \div (2x + 1)$

$\quad = x^2 + 2x + 2$

3. a, b는 정수이고, $ax^3 + bx^2 + 1$이 $x^2 - x - 1$로 나누어 떨어질 때, b의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

$ax^3 + bx^2 + 1$

$= (x^2 - x - 1)(ax - 1)$

$= ax^3 - (1+a)x^2 + (1-a)x + 1$

양변의 계수를 비교하면

$-(1+a) = b, 1 - a = 0$

$\therefore \quad a = 1,\ b = -2$

4. $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$가 $(x-1)(x+2)$로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ 라 놓으면,

$f(1) = 1 - a + b - 2 = 0$

$\therefore \quad -a + b = 1 \cdots$ ㉠

$f(-2) = -8 - 4a - 2b - 2 = 0$

$\therefore \quad 2a + b = -5 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a = -2$, $b = -1$

5. 다항식 $8x^3 - 1$을 $4x^2 + 2x + 1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때 $Q(x)$의 상수항의 계수는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x-1)\left(4x^2 + 2x + 1\right)$

$\therefore Q(x) = 2x - 1$

$\therefore$상수항은 -1

6. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 놓으면,

$x=-1$일 때, $-1-4-1+6=0$

따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.

즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.

즉, $f(x)=(x+1)Q(x)$꼴

$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x^2-5x+6)(x+1)$

$\therefore\ f(x)=(x-3)(x-2)(x+1)$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(-3)^2+(-2)^2+1^2=14$

7. 두 다항식 $A=a+2b$, $B=2a+3b$일 때, $2A+B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$
\begin{aligned}
2A+B &= 2(a+2b)+(2a+3b) \\
&= (2a+4b)+(2a+3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\
&= 2a+(4b+2a)+3b && \text{㉡ 결합법칙} \\
&= 2a+(2a+4b)+3b && \text{㉢ 교환법칙} \\
&= (2a+2a)+(4b+3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\
&= (2+2)a+(4+3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\
&= 4a+7b
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a+(2a+4b)+3b=(2a+2a)+(4b+3b)$: 결합법칙

8. 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 나머지를 $r(x)$라 할 때, $f(x)-g(x)-2r(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$ ② $-r(x)$ ③ 0

④ $r(x)$ ⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=g(x)Q(x)+r(x)$

$\therefore f(x)-g(x)-2r(x)$

$=g(x)Q(x)+r(x)-g(x)-2r(x)$

$=g(x)\{Q(x)-1\}-r(x)$

여기서 $g(x)$의 차수는 $-r(x)$의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$이다.

9. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$(x+1)(y+1)(z+1)$$
$$=xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$$
$$=7$$

10. 다음 중에서 겉넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겉넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

대각선 : $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)$

$= 6^2 - 22 = 14$

$\therefore\ d = \sqrt{14}$

11. x에 관계없이 $\dfrac{x-a}{2x-b}$가 항상 일정한 값을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $\dfrac{b}{a}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\dfrac{x-a}{2x-b} = k$라 놓으면,

$(2k-1)x + (a-bk) = 0$

$\therefore\ 2k-1 = 0,\ a = bk$이므로

$k = \dfrac{1}{2},\ a = \dfrac{1}{2}b$이다.

$\therefore\ \dfrac{b}{a} = 2$

12. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} = \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)}$$
$$= x - 1$$
$$= 1001 - 1$$
$$= 1000$$

13. 두 다항식 $x^3+2x^2-x-2, 2x^3+(a-2)x^2-2x$의 최대공약수가 이차식이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

해설

$x^3+2x^2-x-3=x^2(x+2)-(x+2)$

$=(x+2)(x-1)(x-2)$

$2x^3+(a-2)x^2-2x=x(2x^2+(a-2)x-2)\cdots$①

두 식의 최대 공약수가 이차식이므로

$x=-2,-1,1$ 을 ①식에 대입하면

식의 값이 동시에 0이 되는 경우가 있어야 한다.

$x=-2$일 때, $8-2a+4-2=0,\ a=5$

$x=-1$일 때, $2-a+2-2=0,\ a=2$

$x=1$일 때, $2+a-2-2=0,\ a=2$

$x=-1,\ 1$ 일때, 일치함

최대 공약수는 $(x+1)(x-1)$

$\therefore\ a=2$

14. 이차항의 계수가 1 인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 x^3+2x^2-x-2이다. 두 다항식을 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, $f(3)+g(3)$의 값은?

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

해설

먼저 x^3+2x^2-x-2를 조립제법을 이용하여 인수분해 한다.

1	1	2	−1	−2
		1	3	2
−2	1	3	2	0
		−2	−2	
	1	1	0	
⋮				

$\Rightarrow x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+2)(x+1)$

최대공약수가 $(x-1)$이므로

$f(x)=(x-1)(x+2), g(x)=(x-1)(x+1)\cdots$ ㉠

또는 $f(x)=(x-1)(x+1), g(x)=(x-1)(x+2)\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 두 경우 모두 $f(3)+g(3)=18$

15. $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$을 동시에 만족시키는 x, y, z에 대하여 $ax^2+by^2+cz^2=1$이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① 11　　② 8　　③ 7　　④ 6　　⑤ 4

해설

(i) $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$에서
$x,\ y$를 z에 대하여 나타내면
$x=2z+1,\ y=-3z-1$

(ii) $x=2z+1,\ y=-3z-1$을 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 에 대입하여 정리하면
$(4a+9b+c)z^2+2(2a+3b)z+(a+b-1)=0$
$\therefore\ 4a+9b+c=0,\ 2a+3b=0,\ a+b-1=0$
$\therefore\ a=3,\ b=-2,\ c=6$
$\therefore\ a+b+c=7$

16. 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+2$, $xf(x)+2$가 모두 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어질 때, $f(1)$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{cases} f(x)=(x-\alpha)Q(x)-2 & \cdots ㉠ \\ xf(x)=(x-\alpha)Q'(x)-2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ $\times\, x =$ ㉡에서

$$\begin{aligned} xf(x) &= (x-\alpha)Q(x)-2x \\ &= (x-\alpha)Q(x)-2(x-\alpha)-2\alpha \\ &= (x-\alpha)\{Q(x)-2\}-2\alpha \end{aligned}$$

$\therefore\ -2\alpha=-2$

$\therefore\ \alpha=1$

$\therefore\ f(x)=(x-1)Q(x)-2$

$\therefore\ f(1)=-2$

해설

$f(x)+2$, $xf(x)+2$가 모두 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지므로

$f(\alpha)+2=0\ \therefore\ f(\alpha)=-2\cdots$①

$\alpha f(\alpha)+2=0\cdots$②

①, ②에서 $\alpha=1$

$\therefore\ f(1)=f(\alpha)=-2(\because$ ①$)$

17. $x^4 - 11x^2 + 1$ 이 $(x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)$ 로 인수분해될 때, $a + b$ 의 값은?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

$$
\begin{aligned}
x^4 - 11x^2 + 1 &= (x^2 - 1)^2 - 9x^2 \\
&= (x^2 - 1)^2 - (3x)^2 \\
&= (x^2 - 3x - 1)(x^2 + 3x - 1) \\
&= (x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ a = -3,\ b = -1$

$\therefore\ a + b = -4$

18. 세 실수 x, y, z에 대하여 $[x, y, z] = xy^2 - y^2z$라 하자. $x - y = 2$, $xy - yz - zx = 1$이라 할 때, $[y, x, z] + [z, y, x]$의 값은?

① 0 ② -2 ③ 2 ④ -4 ⑤ 4

해설

$[y, x, z] = yx^2 - x^2z$, $[z, y, x] = zy^2 - y^2x$

$$\begin{aligned}[y, x, z] + [z, y, x] &= yx^2 - x^2z + zy^2 - y^2x \\ &= xy(x - y) - z(x^2 - y^2) \\ &= (x - y)(xy - yz - zx) \\ &= 2 \cdot 1 = 2\end{aligned}$$

19. x의 다항식 $f(x)$가 임의의 실수 u, v에 대하여 $f(u)f(v)=f(u+v)+f(u-v)$가 성립할 때, $f(3)$의 값은? (단, $f(1)=1$이라고 한다.)

① -1 ② 2 ③ -2 ④ 1 ⑤ 5

해설

$f(u)f(v)=f(u+v)+f(u-v)$가
u, v에 대한 항등식이므로
$u=1$, $v=0$일 때도 이 등식이 성립한다.
$\therefore\ f(1)f(0)=f(1)+f(1)$
$f(1)=1$이므로 $f(0)=2$
또, $u=v=1$일 때는
$f(1)f(1)=f(2)+f(0)\quad\therefore\ f(2)=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(3)&=f(2+1)=f(2)f(1)-f(2-1)\\&=f(2)f(1)-f(1)=-1-1\\&=-2\end{aligned}$$

20. x^4 을 $x+\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫을 $q(x)$, 나머지를 r_1 이라 하고, $q(x)$ 를 $x+\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 나머지를 r_2 라 할 때, r_2 의 값은?

① $-\frac{1}{8}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

해설

$x^4=\left(x+\frac{1}{2}\right)q(x)+r_1$ 에서 $x=-\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$r_1=\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

$\therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)q(x)=x^4-\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

이때, $a=-\frac{1}{2}$ 로 놓으면 $(x-a)q(x)=x^4-a^4$

$$\begin{aligned}\therefore\ q(x)&=(x^4-a^4)\div(x-a)\\&=(x+a)(x^2+a^2)\end{aligned}$$

따라서, $q(x)$ 를 $x-a$ 로 나눈 나머지 r_2 는

$q(a)=4a^3$

$$\begin{aligned}\therefore\ q\left(-\frac{1}{2}\right)&=4\left(-\frac{1}{2}\right)^3\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$