1. $0 < a < 1$일 때, $P = \frac{1}{a}$, $Q = \frac{1}{2-a}$, $R = \frac{a}{2+a}$의 대소 관계로 옳은 것은?

① $P < R < Q$　　② $R < Q < P$　　③ $Q < P < R$

④ $Q < R < P$　　⑤ $R < P < Q$

해설

i) $\frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$

이 때 $a > 0,\ 2-a > 0,\ 1-a > 0$ 이므로

$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0$　　$\therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$

즉, P>Q

ii) $\frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$

이 때 $a > 0,\ 2+a > 0,\ a-2 < 0, a+1 > 0$ 이므로

$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0$　　$\therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$

즉, P>R

iii) $\frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)}$

$= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)}$

이 때 $2-a > 0, 2+a > 0, a^2-a+2 > 0$이므로 $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$ 따라서, $P > Q > R$이다.

2. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\frac{1}{x^2}$의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0,\ \frac{1}{x^2} > 0$이므로
산술평균과 기하평균에 의하여
$x^2+1+\frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}}+1 \geq 2+1=3$
등호는 $x^2=\frac{1}{x^2}$일 때 성립하므로 $x^4=1$
따라서 양의 실수 x는 1이다.
최솟값은 3이고, x값은 1이다.

3. 다음 중 세 수 3^{30}, 4^{20}, 12^{15} 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $3^{30} > 4^{20} > 12^{15}$ ② $4^{20} > 3^{30} > 12^{15}$

③ $12^{15} > 4^{20} > 3^{30}$ ④ $3^{30} > 12^{15} > 4^{20}$

⑤ $12^{15} > 3^{30} > 4^{20}$

해설

$\left(\frac{3^{1.5}}{4}\right)^{20} = \left(\frac{3 \times 1.7}{4}\right)^{20} > 1 (3^{1.5} = 3\sqrt{3} \fallingdotseq 3 \times 1.7)$

따라서 3^{30} 이 4^{20} 보다 크다.

$\left(\frac{3^2}{12}\right)^{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{15} < 1$ 이 결과에서

12^{15} 이 3^{30} 보다 크다는 것을 알 수 있다.

4. 다음은 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하는 풀이 과정이다. 적절하지 못한 부분은?

$\frac{1}{x}+\frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}} = \frac{4}{\sqrt{xy}} \cdots$ ㉠ $\therefore \sqrt{xy} \geq 4 \cdots$ ㉡ $\therefore x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2\cdot 4 = 8 \cdots$ ㉢ 따라서 $x+y$의 최솟값은 8이다. $\cdots$ ㉣

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉢, ㉣

해설

㉠ 에서 등호가 성립하는 경우는
$\frac{1}{x}=\frac{4}{y}$, 즉 $y=4x$일 때이고,
㉢ 에서 등호가 성립하는 경우는
$x=y$일 때이므로 서로 일치하지 않는다.
따라서, $x+y$의 최솟값은 8이 될 수가 없다.

5. 다음은 a, b, c, d, x, y, z, w가 실수일 때, 부등식 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) \geq (ax+by+cz+dw)^2$이 성립함을 증명하는 과정의 일부이다. ㉠, ㉡ 부분에 들어갈 기호가 순서대로 적당한 것은?

> [증명] 모든 실수 t에 대하여 다음 부등식이 성립한다.
> $(at-x)^2+(bt-y)^2+(ct-z)^2+(dt-w)^2 \boxed{㉠} 0$
> 이것을 t에 관하여 정리하면
> $(a^2+b^2+c^2+d^2)t^2-2(ax+by+cz+dw)t$
> $+(x^2+y^2+z^2+w^2) \boxed{㉠} 0$
> 따라서 항상 성립하기 위해서는
> $(ax+by+cz+dw)^2-$
> $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) \boxed{㉡} 0\cdots\cdots$(이하 생략)

① >, <　② ≥, <　③ ≤, >　④ ≤, ≥　⑤ ≥, ≤

해설

생략