

1. $i^2 = -1$ 이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2, -\sqrt{2}, 2i, -2i,$
 $3i, -3i, 1-i, 1+i$

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$i^2 = -1$ 이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$ 의 꼴이 되어야 한다.

$\therefore 2i, -2i, 3i, -3i$ 4 개,

$2, -\sqrt{2}$ 는 실수이므로

(실수) $^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$ 가 된다.

2. 등식 $\left(\frac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\frac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right) = a+bi$ 를 만족하는 실수 a, b 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b = 9$

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= \frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)} \\&= \frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2} \\&= \frac{6-7i}{3} = 2 - \frac{7}{3}i \text{ 이므로}\end{aligned}$$

$$2 - \frac{7}{3}i = a + bi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a = 2, b = -\frac{7}{3}$$

$$\therefore a - 3b = 2 - 3 \times \left(-\frac{7}{3}\right) = 2 + 7 = 9$$

3. $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \cdots + \frac{1}{i^{50}}$ 의 값은?

① $-1 + i$

② $-1 - i$

③ 0

④ $1 + i$

⑤ $1 - i$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \cdots + \frac{1}{i^{50}} \\ & \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) + \left(\frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8} \right) + \cdots \\ & + \left(\frac{1}{i^{45}} + \frac{1}{i^{46}} + \frac{1}{i^{47}} + \frac{1}{i^{48}} \right) + \frac{1}{i^{49}} + \frac{1}{i^{50}} \\ & = \left(\frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 \right) + \left(\frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 \right) + \cdots \\ & + \left(\frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 \right) + \frac{1}{i} - 1 \\ & = \frac{1}{i} - 1 = -i - 1 \end{aligned}$$

4. x 에 대한 일차방정식 $(a^2 + 3)x + 1 = a(4x + 1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$(a^2 + 3 - 4a)x = a - 1$$

모든 x 에 대해 성립하려면

$$a^2 - 4a + 3 = 0, \quad a - 1 = 0$$

공통근 : $a = 1$

5. 방정식 $|x - 1| = 2$ 의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -1

해설

i) $x \geq 1$ 일 때

$|x - 1| = x - 1$ 이므로, $x - 1 = 2$

$\therefore x = 3$

ii) $x < 1$ 일 때

$|x - 1| = -x + 1$ 이므로, $-x + 1 = 2$

$\therefore x = -1$

따라서 (i), (ii)에서 $x = 3$ 또는 $x = -1$

6. x 에 대한 이차방정식 $kx^2 + 2(k+1)x + k = 0$ 이 중근을 가질 때 k 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ -1

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$\frac{D}{4} = b'^2 - ac = (k+1)^2 - k^2 = 2k+1 \text{에서}$$

중근을 가질 조건이므로

$$\frac{D}{4} = 0 \text{이어야 한다.}$$

$$2k+1=0 \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

7. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$ 이 실근을 갖도록 실수 k 의 범위를 정하면?

① $k < 1$

② $k \leq 1$

③ $k < 3$

④ $k \leq 3$

⑤ $1 < k < 3$

해설

$$3x^2 + 6x + k = 0,$$

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 3 \cdot k \geq 0$$

$$3k \leq 9 \quad \therefore k \leq 3$$

8. 이차방정식 $x^2 + 2(k - a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\frac{D}{4} = (k - a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$$

$$\therefore -2ka - b + 2 = 0$$

이 식은 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로
 k 에 대한 항등식이다.

$$a = 0, b = 2$$

$$\therefore a + b = 2$$

9. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때 실수 a, b 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 5$

해설

계수가 실수이므로 한 근이 $1 + 2i$ 이면 다른 한 근은 $1 - 2i$ 이다.

$$(\text{두 근의 합}) = (1 + 2i) + (1 - 2i) = -a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(\text{두 근의 곱}) = (1 + 2i)(1 - 2i) = b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\therefore \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서

$a = -2, b = 5$ 이다.

10. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 5$ 의 최솟값을 고르면?

① -14

② 14

③ -5

④ 5

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 6x - 5 \\&= x^2 - 6x + 9 - 9 - 5 \\&= (x - 3)^2 - 14\end{aligned}$$

따라서 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -14 를 가진다.

11. 두 복소수 α, β 에 대하여 연산 $\odot$ 을 $\alpha \odot \beta = \alpha\beta + (\alpha + \beta)i$ 라 할 때, 등식 $(1+i) \odot z = 1$ 을 만족시키는 복소수 z 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1

② $-i$

③ i

④ $1-i$

⑤ $-1+i$

해설

$$\alpha \odot \beta = \alpha\beta + (\alpha + \beta)i \text{ 이므로}$$

$z = x + yi$ (단, x, y 는 실수)라 하면

$$(1+i) \odot (x+yi)$$

$$= (1+i)(x+yi) + (x+1+yi+i)i$$

$$= x - y + (x+y)i - (y+1) + (x+1)i$$

$$= x - 2y - 1 + (2x + y + 1)i = 1$$

$$\therefore x - 2y - 1 = 1 \cdots \textcircled{㉠}, 2x + y + 1 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } x = 0, y = -1 \quad \therefore z = -i$$

12. 복소수 α, β 에 대하여 연산 $*$ 를 $\alpha * \beta = (\alpha + \beta) - \alpha\beta$ 라 하자. $z = \frac{5}{-2-i}$ 일 때, $z * \bar{z}$ 의 값은?

① -1

② 1

③ -9

④ 9

⑤ 0

해설

$$z = -2 + i, \bar{z} = -2 - i$$

$$z * \bar{z} = (z + \bar{z}) - z\bar{z}$$

$$= -4 - 5$$

$$= -9$$

13. $z = \frac{-2}{1 + \sqrt{3}i}$ 일 때, $z^4 - \bar{z}$ 의 값을 구하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\sqrt{3}i$

② $-\sqrt{3}i$

③ $2\sqrt{3}i$

④ $-2\sqrt{3}i$

⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2}{1 + \sqrt{3}i} \\ &= \frac{-2(1 - \sqrt{3}i)}{(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)} \\ &= \frac{-2(1 - \sqrt{3}i)}{-2(1 - \sqrt{3}i)} \\ &= \frac{4}{-1 + \sqrt{3}i} \\ &= \frac{2}{-1 + \sqrt{3}i} \end{aligned}$$

$$\therefore 2z + 1 = \sqrt{3}i \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변을 제곱하여 정리하면

$$4z^2 + 4z + 1 = -3 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

②의 양변에 $z - 1$ 을 곱해주면

$$(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow z^3 = 1$$

$$\therefore z^3 = 1 \text{ 이므로 } z^4 = z$$

$$\therefore z^4 - \bar{z} = z - \bar{z}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \\ &= \sqrt{3}i \end{aligned}$$

14. 일차방정식 $a^2x + 1 = a^4 - x$ 의 해는? (단, a 는 실수)

① a

② $a + 1$

③ $a - 1$

④ $a^2 - 1$

⑤ $a^2 + 1$

해설

$$a^2x + 1 = a^4 - x \text{ 에서 } a^2x + x = a^4 - 1$$

$$(a^2 + 1)x = (a^2 - 1)(a^2 + 1)$$

$$\therefore x = a^2 - 1 (\because a^2 + 1 > 0)$$

15. 다음 보기는 방정식 $(ax - 1)a = x - 1$ 의 해에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $a = -1$ 이면 해가 없다.
- ㉡ $a = 1$ 이면 오직 하나의 해를 갖는다.
- ㉢ $a \neq \pm 1$ 이 아니면 해는 무수히 많다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$(ax - 1)a = x - 1$ 에서

$(a^2 - 1)x = a - 1$

$(a - 1)(a + 1)x = a - 1$

㉠ $a = -1$ 이면 $0 \cdot x = -2$ 이므로 해가 없다.

㉡ $a = 1$ 이면 $0 \cdot x = 0$ 이므로 해는 무수히 많다.

㉢ $a \neq \pm 1$ 이면 $x = \frac{1}{a + 1}$

따라서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

16. $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2 - 2x + 3 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$$

$$(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$$

$$= \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta$$

$$= (\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta$$

$$= 9 - 6 \cdot 2 + 12 = 9$$

17. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta = 6$ 이 성립한다.
이 때, 방정식 $f(5x - 7) = 0$ 의 두 근의 합은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) = 0, \quad (a \neq 0) \text{에서}$$

$$f(5x - 7) = a(5x - 7 - \alpha)(5x - 7 - \beta) = 0$$

$$\therefore 5x = 7 + \alpha, \quad 5x = 7 + \beta$$

$$x = \frac{7 + \alpha}{5}, \quad \frac{7 + \beta}{5}$$

따라서, 구하는 두 근의 합은

$$\frac{14 + \alpha + \beta}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

18. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$ 또는 $a > 1$

② $a < -2$ 또는 $a > 2$

③ $1 < a < -1$

④ $-2 < a < 2$

⑤ $a = -1$ 또는 $a = 1$

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가
 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$ 에서
판별식의 값은 양이다.

$$\text{즉 } D = a^2 - 4 > 0$$

$$\therefore a < -2 \text{ 또는 } a > 2$$

19. 직선 $y = -x + 1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동 하였더니 이차함수 $y = x^2 - 3x$ 의 그래프에 접하였다. 이때, 상수 m 의 값은?



① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

직선 $y = -x + 1$ 을 x 축의 방향으로
 m 만큼 평행이동하면

$$y = -(x - m) + 1 = -x + m + 1$$

이 직선이 $y = x^2 - 3x$ 의 그래프와 접하므로

$$\text{이차방정식 } x^2 - 3x = -x + m + 1,$$

즉, $x^2 - 2x - m - 1 = 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (-m - 1) = 0$$

$$2 + m = 0 \quad \therefore m = -2$$

20. 두 개의 곡선 $y = ax^2 + bx + 8$, $y = 2x^2 - 3x + 2$ 의 두 교점을 연결하는 직선이 $y = -x + 6$ 일 때, 상수 a , b 의 값을 구하면?

① $a = -1$, $b = -1$

② $a = -1$, $b = 0$

③ $a = 1$, $b = 0$

④ $a = 1$, $b = -1$

⑤ $a = 0$, $b = 1$

해설

$$y = ax^2 + bx + 8 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = 2x^2 - 3x + 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$y = -x + 6 \quad \dots \textcircled{3}$$

두 교점을 ①, ②, ③이 모두 지나므로

②, ③의 교점을 ①이 지난다고 생각해도 좋다.

②, ③을 연립하여 풀면

교점은 (2, 4), (-1, 7) 이고,

이 두 점을 곡선 ①이 지나므로

$$4a + 2b + 8 = 4, \quad a - b + 8 = 7$$

$$\therefore a = -1, \quad b = 0$$

21. 함수 $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$t = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면

$$y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 \cdots \textcircled{㉠}$$

또, $t = (x - 1)^2 + 2$ 이므로

$$t \geq 2 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡의 범위에서 ㉠의 최솟값은

$t = 2$ 일 때 1이다.

22. 차가 12인 두 수가 있다. 이 두 수의 곱이 최소가 될 때, 두 수 중 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

두 수를 각각 x , $x + 12$ 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(x + 12) \\ &= x^2 + 12x \end{aligned}$$

$$x = (x + 6)^2 - 36$$

$x = -6$ 일 때, 최솟값 -36 을 갖는다.

$$x = -6, \quad -6 + 12 = 6$$

따라서 두 수 중에서 큰 수는 6 이다.

23. 지면으로부터 초속 30m 로 위로 던진 공의 t 초 후의 높이를 h m 라고 하면 $h = -5t^2 + 30t$ 인 관계가 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하여라.

▶ 답 : m

▷ 정답 : 45

해설

$h = -5t^2 + 30t$ 에서 $h = -5(t - 3)^2 + 45$ 이다.

따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 45m 이다.

24. 이차방정식 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 두 근을 a, b 라 할 때 $\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1}$ 의 값은?

① 4

② 1

③ $\sqrt{6}$

④ $2\sqrt{6}$

⑤ 6

해설

$x^2 - 4x + 1 = 0$ 에서 $\frac{D}{4} = (-2)^2 - 1 = 3 > 0$ 이므로

a, b 는 서로 다른 실수이고, 근과 계수의 관계에 의하여
 $a + b = 4, ab = 1$ 이므로 $a > 0, b > 0$

a, b 를 식에 대입하면

$$a^2 - 4a + 1 = 0, b^2 - 4b + 1 = 0$$

$$\therefore a^2 + 1 = 4a, b^2 + 1 = 4b$$

$$\therefore \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} = \sqrt{4a} + \sqrt{4b}$$

$$= 2(\sqrt{a} + \sqrt{b}) (\because a > 0, b > 0)$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$= 6 (\because a + b = 4, ab = 1)$$

$$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{6}$$

25. 이차방정식 $x^2 + kx + 3k - 11 = 0$ 의 두 근의 차가 최소가 되도록 실수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 6

해설

$x^2 + kx + 3k - 11 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -k, \alpha\beta = 3k - 11$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= k^2 - 12k + 44 = (k - 6)^2 + 8$$

따라서 $k = 6$ 일 때 $(\alpha - \beta)^2$ 는 최소

해설

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{D}}{|a|} \text{이므로}$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{k^2 - 12k + 44}}{1}$$

$\therefore k^2 - 12k + 44$ 가 최소하려면 $k = 6$

26. a, b, c 는 실수이고, $a > 0, ac - b^2 > 0, b \neq 0$ 이라 할 때, x 의 이차방정식 $x^2 - (a + c)x + ac - b^2 = 0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① 서로 다른 두 개의 음의 근 ② 서로 다른 두 개의 양의 근
 ③ 양의 중근 ④ 음의 중근
 ⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$x^2 - (a + c)x + ac - b^2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a + c)^2 - 4(ac - b^2)$$

$$= (a - c)^2 + 4b^2 > 0 \cdots \textcircled{㉠} (\because b \neq 0)$$

$a > 0, ac > b^2 > 0$ 에서 $c > 0$ 이므로

$$(\text{두 근의 곱}) = ac - b^2 > 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$(\text{두 근의 합}) = a + c > 0 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 양의 근을 가진다.

27. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -4 를 가지며 점 $(1, 2)$ 를 지난다. 이 때, $a - b - c$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

꼭짓점이 $(3, -4)$ 이므로 $y = a(x-3)^2 - 4$

$(1, 2)$ 를 대입하면

$$2 = 4a - 4$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}(x-3)^2 - 4 = \frac{3}{2}x^2 - 9x + \frac{19}{2}$$

$$a = \frac{3}{2}, b = -9, c = \frac{19}{2}$$

$$\therefore a - b - c = \frac{3}{2} - (-9) - \frac{19}{2} = 1$$

28. $1 \leq x \leq a$ 에서 함수 $y = x^2 - 2x - 3a$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 4 일 때, a 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$y = x^2 - 2x - 3a = (x - 1)^2 - 3a - 1$$

$$\text{최솟값: } x = 1 \text{ 일 때 } \Rightarrow -3a - 1$$

$$\text{최댓값: } x = a \text{ 일 때 } \Rightarrow a^2 - 5a$$

$$\therefore a^2 - 5a - (-3a - 1) = 4$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$$

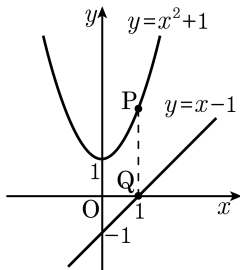
$$a = 3 (\because a > 1)$$

29. 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점 P 에서 y 축에
평행인 직선을 그어 직선 $y = x - 1$ 과 만나는
점을 Q 라 할 때 $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$
④ $\frac{7}{3}$

② $\frac{7}{4}$
⑤ $\frac{5}{2}$

③ $\frac{6}{5}$



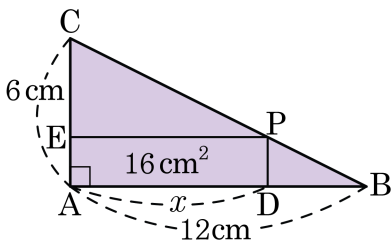
해설

$\overline{PQ}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의
x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를
($t, t^2 + 1$) 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 ($t, t - 1$)

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= t^2 + 1 - (t - 1) \\ &= t^2 - t + 2 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$

30. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 12\text{cm}$, $\overline{AC} = 6\text{cm}$ 인 직각삼각형 ABC 의 빗변 위에 점 P 를 잡아 직사각형 EADP 를 만들었을 때, 이 직사각형의 넓이가 16cm^2 이었다. 이 때, $\overline{AD}$ 의 길이를 구하면? (단, $\overline{AD} > 6\text{cm}$)



① 7cm

② 8cm

③ 9cm

④ 10cm

⑤ 11cm

해설

$\triangle CEP \sim \triangle CAB$ (AA 닮음) 이므로

$$\overline{CE} : \overline{EP} = \overline{CA} : \overline{AB}$$

$$\text{즉, } \overline{CE} : x = 6 : 12$$

$$\therefore \overline{CE} = \frac{1}{2}x$$

$$\text{따라서 } \overline{EA} = 6 - \frac{1}{2}x \text{ 이므로 } x \left(6 - \frac{1}{2}x \right) = 16$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 6x = 16$$

$$x^2 - 12x + 32 = (x-4)(x-8) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = 8$$

그런데 $6 < x < 12$ 이므로 $x = 8(\text{cm})$

31. 복소수 $z_1 = 1 - i$ 에 대하여 $z_{n+1} = \bar{z}_n + (1 + i)$ 이라 하자. $z_{100} = a + bi$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수이고 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 98

② 99

③ 100

④ 101

⑤ 102

해설

$$z_1 = 1 - i$$

$$z_2 = 1 + i + 1 + i = 2 + 2i$$

$$z_3 = 2 - 2i + 1 + i = 3 - i$$

$$z_4 = 4 + 2i \cdots$$

$$\Rightarrow z_{2n} = 2n + 2i, z_{2n-1} = (2n - 1) - i \quad (n \text{ 은 자연수})$$

$$\therefore z_{100} = 100 + 2i, a + b = 102$$

32. 실수 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$ 가 $16 + x_1 \times x_2 \times \dots \times x_9 = 0$ 을 만족할 때,
 $\sqrt{x_1} \times \sqrt{x_2} \times \dots \times \sqrt{x_9}$ 의 값들의 곱을 구하면?

① 8

② 16

③ 24

④ 36

⑤ 14

해설

$x_1 \times x_2 \times \dots \times x_9 = -16$ 이므로

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$ 중에서 음수의 개수는 홀수개이다.

이 중에서 음수인 것들은 그 절대값을 취하여

$y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ ($y_i > 0$) 이라 하고 양수인 것들은

$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ ($z_i > 0$) 이라 하자.

그러면 $y_1 y_2 \dots y_m z_1 z_2 \dots z_n = 16$ ($m + n = 9, m : \text{홀수}$)

i) $m = 4k + 1$ ($k = 0, 1, 2$) 일 때,

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \dots y_m z_1 z_2 \dots z_n} \cdot i^{4k+1} \\ &= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i \\ &= 4i \end{aligned}$$

ii) $m = 4k + 3$ ($k = 0, 1$) 일 때,

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \dots y_m z_1 z_2 \dots z_n} \cdot i^{4k+3} \\ &= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i^3 \\ &= -4i \end{aligned}$$

$\therefore$ i), ii) 에서 $4i \times (-4i) = 16$

33. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 4(a-1)x + a - 2b = 0$ 이 중근을 가질 때, b 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{17}{32}$

해설

$x^2 - 4(a-1)x + a - 2b = 0$ 가 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = 4(a-1)^2 - (a-2b) = 4a^2 - 9a + 4 + 2b = 0$$

$$\therefore b = -2a^2 + \frac{9}{2}a - 2 = -2\left(a - \frac{9}{8}\right)^2 + \frac{17}{32}$$

따라서 $a = \frac{9}{8}$ 일 때, b 는 최댓값 $\frac{17}{32}$ 을 갖는다.