1. 다음 보기에서 이차방정식의 개수는?

보기

㉠ $2x^2 - 5 = x^2$

㉡ $x^2 = -x + 2$

㉢ $x^2 = 0$

㉣ $x^2 = (x-1)^2 + x^2$

㉤ $x(x^2+1) = x^3 + x^2 - 1$

㉥ $2x^2 - 5x - 1 = 2(x^2 - 1)$

① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

이차방정식은 (x에 관한 이차식)$= 0$ 꼴의 등식이다.

$\therefore$ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ 5 개

2. 이차방정식 $3x^2 - (2k+3)x - 3 = 0$ 의 두 근 중 한 근을 a 라고 한다. $a - \frac{1}{a} = k$ 일 때, $(k-1)^2$ 의 값은?

① 25 ② 16 ③ 9 ④ 4 ⑤ 1

해설

a가 주어진 방정식의 근이므로 $x = a$에 대입하면

$3a^2 - (2k+3)a - 3 = 0$

양변을 a 로 나누면, $3a - (2k+3) - \frac{3}{a} = 0$

$3\left(a - \frac{1}{a}\right) = 2k+3$, $3k = 2k+3 \therefore\ k = 3$

$\therefore\ (k-1)^2 = 4$

3. $(2x+3):(x-3)=x:4$ 를 만족하는 x 의 값을 각각 a, b 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=11$

해설

$(2x+3):(x-3)=x:4$

$x^2-3x=4(2x+3)$, $x^2-3x=8x+12$

$x^2-11x-12=0$, $(x+1)(x-12)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=12$

따라서 $a+b=11$ 이다.

4. 이차방정식 $(2x-1)^2=3$ 의 두 근의 합을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 6

해설

$(2x-1)^2=3$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}=1$

5. $5x+2 \le 4x+5$이고 x는 자연수 일 때, 다음 이차방정식을 풀면?

$x^2-6x+5=0$

① $x=1,\ x=3$ ② $x=1,\ x=5$ ③ $x=1$

④ $x=2,\ x=3$ ⑤ $x=2,\ x=5$

해설

$5x+2 \le 4x+5$ 에서 $x \le 3$ 이다.
따라서 x의 값은 1, 2, 3이다.
$x^2-6x+5=0$를 만족하는 x의 값은 $x=1,\ x=5$이므로
이차방정식의 해는 $x=1$이다.

6. 다음 중 $\left(\frac{7}{3}x-14\right)(2y+8)=0$을 만족하는 것의 개수는?

㉠ $x=6,\ y=-4$	㉡ $x=6,\ y=4$
㉢ $x=-6,\ y=-4$	㉣ $x=-6,\ y=4$
㉤ $x=4,\ y=6$	㉥ $x=-4,\ y=6$

① 한 개도 없다. ② 2 개 ③ 3 개

④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$\frac{7}{3}x-14=0$ 또는 $2y+8=0$ 이므로

$x=6$ 또는 $y=-4$ 인 것을 찾으면

$x=6$ 인 것은 ㉠, ㉡

$y=-4$ 인 것은 ㉠, ㉢

따라서 만족하는 것의 개수는 ㉠, ㉡, ㉢이므로

3 개이다.

7. 두 이차방정식 $2x^2 - ax + 2 = 0$, $x^2 - 3x + b = 0$ 의 공통인 해가 2 일 때, ab 의 값을 구하면?

① -25 ② -10 ③ 1 ④ 10 ⑤ 25

해설

주어진 식에 x 대신 2 를 대입하면

$8 - 2a + 2 = 0, \quad a = 5$

$4 - 6 + b = 0, \quad b = 2$

$\therefore ab = 10$

8. 이차방정식 $(x-1)(x-b)=-1$이 0이 아닌 중근 a를 가진다. 이때, b의 값은? (단, a, b는 정수)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$(x-1)(x-b)=-1$이 중근 a를 가지므로
x에 a를 대입하면
$(a-1)(a-b)=-1$
i) $a-1=-1$, $a-b=1$인 경우
$a=0$, $b=-1$, $a\neq 0$이므로 부적합
ii) $a-1=1$, $a-b=-1$인 경우
$a=2$, $b=3$
$\therefore\ b=3$

9. $x(x-3)=0$ 을 $(ax+b)^2=q$ 의 꼴로 바꾸었을 때, abq 의 값을 구하면?

① $\frac{27}{8}$ ② $-\frac{27}{8}$ ③ $\frac{-25}{8}$ ④ $\frac{25}{8}$ ⑤ $\frac{23}{8}$

해설

$x(x-3)=0$

$x^2-3x=0$

$x^2-3x+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

$a=1, b=-\frac{3}{2}, q=\frac{9}{4}$

$\therefore abq=-\frac{27}{8}$

10. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$의 근에 대한 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $k = -6$이면 근이 2개이다.

② $k = -1$이면 정수인 근을 갖는다.

③ $k = 0$이면 무리수인 근을 갖는다.

④ $k = 1$이면 근이 1개이다.

⑤ $k = 3$이면 중근을 갖는다.

해설

$(x-1)^2 = 3-k,\ x-1 = \pm\sqrt{3-k}$

$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{3-k}$

음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$3 > k$: 근이 0개

$k = 3$: 근이 1개

$3 < k$: 근이 2개

11. x 에 관한 이차방정식 $2ax^2 + px - ap + 4q = 0$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 $x = 1$ 의 근을 가질 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

$x = 1$ 을 대입하면

$2a + p - ap + 4q = 0$

$(2 - p)a + p + 4q = 0$

a 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2 - p = 0,\ p + 4q = 0$

$p = 2,\ p + 4q = 0,\ 4q = -2,\ q = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ p + q = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

12. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ 이고, $k=f(49)+f(50)+f(51)+\cdots+f(79)+f(80)$ 이다.
k 가 x 에 관한 이차방정식 $(a+5)x^2+\left(a^2-2\right)x+4(a-2)=0$ 의 한 근일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\dfrac{8}{3}$

해설

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}$$
$$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$
$$k=f(49)+f(50)+f(51)+\cdots+f(79)+f(80)$$
$$=\sqrt{50}-\sqrt{49}+\sqrt{51}-\sqrt{50}$$
$$+\cdots+\sqrt{81}-\sqrt{80}$$
$$=-\sqrt{49}+\sqrt{81}$$
$$=-7+9=2$$
$(a+5)x^2+\left(a^2-2\right)x+4(a-2)=0$ 에 $x=2$ 를 대입하면
$4a+20+2a^2-4+4a-8=0$
$2a^2+8a+8=0,\ a^2+4a+4=0$
$(a+2)^2=0 \qquad \therefore\ a=-2$
$a=-2$ 를 식에 대입하면
$3x^2+2x-16=0,\ (x-2)(3x+8)=0$
$\therefore\ x=2$ 또는 $x=-\dfrac{8}{3}$

13. $a > 0$인 상수 a에 대하여 이차방정식 $x^2+2(2a-1)x+(3a^2-4a+1) = 0$의 두 근 중 작은 근이 이차방정식 $4x^2 - 12px + 9p^2 = 0$의 근과 같을 때, $2a + p$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{3}$

해설

$x^2 + 2(2a - 1)x + (3a^2 - 4a + 1) = 0$에서

$x^2 + 2(2a - 1)x + (3a - 1)(a - 1) = 0$

$(x + 3a - 1)(x + a - 1) = 0$

$\therefore\ x = -3a + 1$ 또는 $x = -a + 1$

$a > 0$ 이므로 두 근 중 작은 근은

$x = -3a + 1 \cdots$ ㉠

$4x^2 - 12px + 9p^2 = 0$ 에서 $(2x - 3p)^2 = 0$

$\therefore\ x = \frac{3p}{2} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-3a + 1 = \frac{3p}{2}$

$\therefore\ 2a + p = \frac{2}{3}$

14. $x^2+ax+b=0$ 에서 계수 a , b 를 정하기 위하여 주사위를 던져서 나오는 첫 번째의 수를 a , 두 번째의 수를 b 라 한다. 이 때, 이 이차방정식이 중근을 가지는 확률은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{18}$

해설

중근을 가지려면 $x^2+ax+b=0$ 이 완전제곱식이 되어야 하므로

$\left(a\times\frac{1}{2}\right)^2=b$ 이다.

$a^2=4b$ 를 만족하는 $(a,\ b)$ 를 구하면 $(a,\ b)=(2,\ 1),\ (4,\ 4)$ 의 두 가지이고 모든 경우의 수는 36 가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$ 이다.

15. 이차방정식 $\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}=\frac{2}{3x}$ 의 양의 근을 α 라고 할 때, $3\alpha^2-3\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $11+\sqrt{33}$

해설

$\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}=\frac{2}{3x}$ 의 양변에 $12x$ 를 곱하면

$3x^2-6x-8=0$

$3(x^2-2x+1)=8+3$

$3(x-1)^2=11$

$\therefore\ x=1\pm\frac{\sqrt{33}}{3}$

α 는 양의 근이므로 $\alpha=1+\frac{\sqrt{33}}{3}$

$\therefore\ 3\alpha^2-3\alpha=11+\sqrt{33}$