1. 복소수 $\dfrac{3+i}{1+i}+\dfrac{a-i}{1-i}$ 가 실수가 되도록 하는 실수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{3+i}{1+i}+\frac{a-i}{1-i}=\frac{(3+i)(1-i)+(1+i)(a-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{4-2i+(a+1)+(a-1)i}{2}$$
$$=\frac{a+5+(a-3)i}{2}$$

위의 식이 실수가 되려면 허수 부분이 0이어야 하므로 $a-3=0$

$\therefore\ a=3$

2. $(3+i)(a+bi) = 1-3i$를 만족하는 실수 a, b에 대하여 $a+b$를 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(3+i)(a+bi) = 1-3i$

$(3a-b)+(a+3b)i = 1-3i$

$\therefore\ 3a-b=1,\quad a+3b=-3$

$\Rightarrow\quad a=0,\quad b=-1$

$\therefore\ a+b=-1$

3. 다음 식을 간단히 하여라.

$$\frac{1-2i}{2+3i}+\frac{1+2i}{2-3i}$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $-\frac{8}{13}$

해설

(준식)

$$=\frac{(1-2i)(2-3i)+(1+2i)(2+3i)}{(2+3i)(2-3i)}$$

$$=\frac{(2-6)+(-4-3)i+(2-6)+(4+3)i}{2^2+3^2}$$

$$=\frac{(-4-7i)+(-4+7i)}{13}$$

$$=-\frac{8}{13}$$

4. $i^2 = -1$이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2,\quad -\sqrt{2},\quad 2i,\quad -2i,$ $3i,\quad -3i,\quad 1-i,\quad 1+i$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$i^2 = -1$이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$의 꼴이 되어야 한다.

$\therefore\ 2i,\ -2i,\ 3i,\ -3i$ 4개,

$2, -\sqrt{2}$는 실수이므로

$(\text{실수})^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$가 된다.

5. $(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$ 가 순허수일 때, x 의 값은?

① 0　　② 1　　③ -3　　④ 1, 3　　⑤ -1

해설

$(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$
$=x^2+x^2i+2x+4xi-3+3i$
$=(x^2+2x-3)+(x^2+4x+3)i$
순허수를 만족하려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$이어야 한다.
$x^2+2x-3=0$이면서, $x^2+4x+3\neq 0$인 x값을 찾아야 한다.
$\therefore x=1$

6. α, β 가 복소수일 때, <보기> 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고른 것은? (단, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

ㄱ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0$, $\beta=0$ 이다.

ㄴ $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ 이다.

ㄷ $\alpha=\overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ 반례 : $\alpha=1$, $\beta=i$

ㄴ (생략)

ㄷ $\alpha=x+yi$ 라 하면

$\alpha\beta=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2$($x, y$는실수)

$x^2+y^2=0$ 이려면 $x=0, y=0$

즉, $\alpha=0$

7. $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 아닌 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 2 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 14

해설

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^{n} = i^n$$

$i^n = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m + 2$ $(m \geq 0)$

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

8. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{\text{㉠}}\,\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉡}}\,\frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉢}}\,\frac{\sqrt{-16}}{2} \\ &= \boxed{\text{㉣}}\,\frac{4i}{2} \\ &= \boxed{\text{㉤}} = \sqrt{-4}\end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$

따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

9. $\dfrac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}}$ 의 값은 ?

① $1-\sqrt{2}$　　② $-1-\sqrt{2}$　　③ $(1+\sqrt{2})i$

④ $-(1+\sqrt{2})i$　　⑤ $(1-\sqrt{2})i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{1}{i}\\ &= (\sqrt{2}+1)\times(-i)\\ &= -(1+\sqrt{2})i\end{aligned}$$

10. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ 일 때, $f\left(\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2\right)+f\left(\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right)+f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$$
$$=f(i^2)+f((-i)^2)$$
$$=f(-1)+f(-1)$$
$$=0$$

11. 두 복소수 α, β에 대하여 연산 $\odot$ 을 $\alpha \odot \beta = \alpha\beta + (\alpha + \beta)i$ 라 할 때, 등식 $(1+i)\odot z = 1$ 을 만족시키는 복소수 z의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1　　② $-i$　　③ i

④ $1-i$　　⑤ $-1+i$

해설

$\alpha \odot \beta = \alpha\beta + (\alpha+\beta)i$이므로

$z = x + yi$ (단, x, y는 실수)라 하면

$(1+i) \odot (x+yi)$

$= (1+i)(x+yi) + (x+1+yi+i)i$

$= x - y + (x+y)i - (y+1) + (x+1)i$

$= x - 2y - 1 + (2x+y+1)i = 1$

$\therefore\ x - 2y - 1 = 1 \cdots$ ㉠, $2x + y + 1 = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x = 0,\ y = -1$　　$\therefore\ z = -i$

12. $\bar{z} = -z$ 를 만족하는 z 에 대하여 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 이라 할 때, $w\bar{w}$ 의 값을 구하여라. (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$z = a + bi$ $(a,\ b$ 는 실수$)$로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$

$\bar{z} = -z$ 이므로 $a - bi = -(a + bi)$

$a - bi = -a - bi$, $2a = 0$

따라서 $a = 0$ 이므로 $z = bi$

$z = bi$ 를 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 에 대입하면

$$w = \frac{-1+bi}{1+bi},\ \bar{w} = \overline{\left(\frac{-1+bi}{1+bi}\right)} = \frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$\therefore\ w\bar{w} = \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-(1+bi)}{-(-1+bi)}$$

$$= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{1+bi}{-1+bi} = 1$$

13. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x 의 값으로 옳지 않은 것을 <u>모두</u> 고르면?

① 0　　② $\sqrt{3}$　　③ $-\sqrt{3}$　　④ 1　　⑤ -1

해설

$$i(x+i)^3 = i(x^3+3x^2i-3x-i)$$
$$= (-3x^2+1)+(x^3-3x)i$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$

14. a, b는 양수라 할 때, 다음 중 $z = a(1+i) + b(1-i), i = \sqrt{-1}$의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $1-3i$ ② $2+3i$ ③ $4-2i$

④ $-3+2i$ ⑤ $2-5i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i$ (a, b 는 양수)

① $1-3i$ 에서 $a+b=1,\ a-b=-3$

$a=-1,\ b=2 \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

② $2+3i$ 에서 $a+b=2,\ a-b=3$

$a=\frac{5}{2},\ b=-\frac{1}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

③ $4-2i$ 에서 $a+b=4,\ a-b=-2$

$a=1,\ b=3 \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건을 만족시킴

④ $-3+2i$ 에서 $a+b=-3,\ a-b=2$

$a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{5}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

⑤ $2-5i$ 에서 $a+b=2,\ a-b=-5$

$a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

15. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{14}$ 의 값은?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 $2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, \alpha^3 = 1$

$\therefore\ \alpha^{3k+1} = \alpha, \alpha^{3k+2} = \alpha^2, \alpha^{3k} = 1$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (\alpha + \alpha^2 + 1) + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \\ &\quad \cdots + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \alpha + \alpha^2 \\ &= \alpha + \alpha^2 \\ &= -1\end{aligned}$$

$(\because\ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$