1. $(1+ai)^2 = 2i$ (a 는 실수)라 할 때 $(1+ai)(1-ai)$ 의 값을 구하시오.
(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(1+ai)^2 = 2i$ 에서 $(1-a^2)+2ai = 2i$
복소수의 상등에서 $1-a^2 = 0,\ 2a = 2$
$\therefore\ a = 1$
$\therefore\ (1+ai)(1-ai) = (1+i)(1-i)$
$= 1-(-1)$
$= 2$

2. 복소수 $z = x + yi$를 좌표평면 위에 점 $p(x,\ y)$에 대응시킬 때, $(3-4i)z$가 실수가 되게 하는 점 p의 자취가 나타내는 도형은?

① 기울기가 양인 직선　② 기울기가 음인 직선
③ 위로 볼록한 포물선　④ 아래로 볼록한 포물선
⑤ 원

해설

$(3-4i)z = (3-4i)(x+yi)$
$= (3x+4y) + (-4x+3y)i$

실수가 되려면 허수부 $-4x+3y=0$이다.

$\therefore y = \frac{4}{3}x$ (⇒ 기울기가 양인 직선)

3. α,β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 이면 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉡ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

㉢ $\alpha^2+\beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

① ㉠　② ㉠ ,㉡　③ ㉡ ,㉢
④ ㉠ ,㉢　⑤ ㉠ ,㉡ ,㉢

해설

$\alpha = a+bi \Rightarrow \overline{\beta} = a+bi$
㉠ $\alpha+\beta = (a+bi)+(a-bi) = 2a$ 는 실수 (T), $\alpha\beta = a^2+b^2 =$ 실수
㉡ $\alpha\beta = a^2+b^2 = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$
$\therefore \alpha = 0$ (T)
㉢ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$ 일 때, $\alpha^2+\beta^2 = 0$

4. $a,\ b$는 양수라 할 때, 다음 중 $z = a(1+i) + b(1-i), i = \sqrt{-1}$의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $1-3i$　② $2+3i$　③ $4-2i$

④ $-3+2i$　⑤ $2-5i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i$ (a, b 는 양수)

① $1-3i$ 에서 $a+b=1,\ a-b=-3$

$a=-1,\ b=2 \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

② $2+3i$ 에서 $a+b=2,\ a-b=3$

$a=\frac{5}{2},\ b=-\frac{1}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

③ $4-2i$ 에서 $a+b=4,\ a-b=-2$

$a=1,\ b=3 \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건을 만족시킴

④ $-3+2i$ 에서 $a+b=-3,\ a-b=2$

$a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{5}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

⑤ $2-5i$ 에서 $a+b=2,\ a-b=-5$

$a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{7}{2} \Rightarrow a,\ b$는 양수라는 조건에 어긋남

5. $a = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $a^5 + a^3 - 1$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$　　② 0　　③ 1
④ $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$　　⑤ $-1+\sqrt{3}i$

해설

$a = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$2a+1 = -\sqrt{3}i$ 의 양변을 제곱하면,

$4a^2 + 4a + 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad a^2 + a + 1 = 0$

양변에 $a - 1$ 를 곱하면

$(a-1)(a^2+a+1) = 0 \Leftrightarrow a^3 - 1 = 0$

$\therefore \ a^3 = 1$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^3a^2 + a^3 - 1 \\ &= a^2 \\ &= -a - 1 (\because a^2 + a + 1 = 0) \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$