

1. $(1 + ai)^2 = 2i$ (a 는 실수) 라 할 때 $(1 + ai)(1 - ai)$ 의 값을 구하시오.
(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(1 + ai)^2 = 2i \text{ 에서 } (1 - a^2) + 2ai = 2i$$

$$\text{복소수의 상등에서 } 1 - a^2 = 0, 2a = 2$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore (1 + ai)(1 - ai) = (1 + i)(1 - i)$$

$$= 1 - (-1)$$

$$= 2$$

2. 복소수 $z = x + yi$ 를 좌표평면 위에 점 $p(x, y)$ 에 대응시킬 때, $(3 - 4i)z$ 가 실수가 되게 하는 점 p 의 자취가 나타내는 도형은?

- ① 기울기가 양인 직선 ② 기울기가 음인 직선
③ 위로 볼록한 포물선 ④ 아래로 볼록한 포물선
⑤ 원

해설

$$\begin{aligned}(3 - 4i)z &= (3 - 4i)(x + yi) \\ &= (3x + 4y) + (-4x + 3y)i\end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부 $-4x + 3y = 0$ 이다.

$$\therefore y = \frac{4}{3}x \quad (\Rightarrow \text{기울기가 양인 직선})$$

3. α, β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\bar{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ $\alpha = \bar{\beta}$ 이면 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉡ $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\alpha = a + bi \Rightarrow \bar{\beta} = a + bi$$

㉠ $\alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ 는 실수 (T), $\alpha\beta = a^2 + b^2 =$ 실수

㉡ $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$

$\therefore \alpha = 0$ (T)

㉢ 반례: $\alpha = 1, \beta = i$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

4. a, b 는 양수라 할 때, 다음 중 $z = a(1+i) + b(1-i), i = \sqrt{-1}$ 의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $1 - 3i$

② $2 + 3i$

③ $4 - 2i$

④ $-3 + 2i$

⑤ $2 - 5i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i$ (a, b 는 양수)

① $1 - 3i$ 에서 $a+b=1, a-b=-3$

$a=-1, b=2 \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

② $2 + 3i$ 에서 $a+b=2, a-b=3$

$a=\frac{5}{2}, b=-\frac{1}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

③ $4 - 2i$ 에서 $a+b=4, a-b=-2$

$a=1, b=3 \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건을 만족시킴

④ $-3 + 2i$ 에서 $a+b=-3, a-b=2$

$a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{5}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

⑤ $2 - 5i$ 에서 $a+b=2, a-b=-5$

$a=-\frac{3}{2}, b=\frac{7}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

5. $a = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $a^5 + a^3 - 1$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

② 0

③ 1

④ $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $-1 + \sqrt{3}i$

해설

$$a = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$2a + 1 = -\sqrt{3}i$ 의 양변을 제곱하면,

$$4a^2 + 4a + 1 = -3 \Rightarrow a^2 + a + 1 = 0$$

양변에 $a - 1$ 를 곱하면

$$(a - 1)(a^2 + a + 1) = 0 \Leftrightarrow a^3 - 1 = 0$$

$$\therefore a^3 = 1$$

$$(\text{준식}) = a^3 a^2 + a^3 - 1$$

$$= a^2$$

$$= -a - 1 (\because a^2 + a + 1 = 0)$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$