1. $2|x-1|+x-4=0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

i) $x<1$일 때,

$-2(x-1)+(x-4)=0$

$\therefore x=-2$

ii) $x\geq 1$일 때,

$2(x-1)+x-4=0$

$\therefore x=2$

따라서 구하는 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이다.

2. x에 대한 이차방정식 $kx^2+(2k+1)x+6=0$의 해가 2, α일 때, $k+\alpha$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

해가 $2, \alpha$라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.

$k \cdot 2^2+(2k+1)2+6=0$

$4k+4k+8=0$에서 $k=-1$

$k=-1$을 방정식에 대입하고 α를 구한다.

$-x^2-x+6=0,\ x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0,\ x=2,-3$

$\therefore k=-1,\ \alpha=-3$

$\therefore\ k+\alpha=-4$

3. x에 대한 이차방정식 $(m+3)x^2-4mx+2m-1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값의 합은?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로

$$\frac{D}{4}=(-2m)^2-(m+3)(2m-1)=0$$

$$4m^2-(2m^2+5m-3)=0$$

$$2m^2-5m+3=0$$

$$(m-1)(2m-3)=0$$

$\therefore m=1$ 또는 $\frac{3}{2}$

$$\therefore 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

4. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x+\frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x+\frac{1}{x}=t$ 라 하고,

양변에 x 를 곱하면

$x^2+1=tx$

$x^2-tx+1=0$ 에서 x 는 실수이므로

$D=t^2-4 \geq 0 \quad \therefore t^2 \geq 4,\ t \leq -2$ 또는 $t \geq 2$

5. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+b-3=0$이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=1, b=2$ ② $a=0, b=3$ ③ $a=-1, b=2$

④ $a=0, b=2$ ⑤ $a=-1, b=3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.

$D'=(k-a)^2-(k^2+b-3)=0$

$\Rightarrow \quad -2ak+a^2-b+3=0$

모든 k 에 대해 성립하려면

$-2a=0,\ a^2-b+3=0$

$\therefore \quad a=0, b=3$

6. $x^2+ax+b=0$ (a, b 는 실수) 의 한 근이 $1+i$ 일 때, a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1+i$ 이므로,
켤레근 $1-i$ 도 식의 근.
$(1+i)+(1-i)=-a$
$\therefore\ a=-2$

7. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$　② $-1 < k < 8$　③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$　⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

8. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.

$y = x(18-x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$

$y = -(x-9)^2 + 81$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

9. 방정식 $a^2x+1=a(x+1)$의 해가 존재하지 않을 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a^2x+1=a(x+1)$ 에서 $a(a-1)x=a-1$

i) $a=1$ 일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.

ii) $a=0$ 이면 $0\cdot x=-1$ 이므로 해가 없다.

iii) $a\neq 0, a\neq 1$ 일 때, $x=\dfrac{a-1}{a(a-1)}=\dfrac{1}{a}$

따라서 해가 없을 때의 a의 값은 0이다.

10. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 + 3|x| - 4 = 0$$

① 0 ② ±1 ③ $\pm\sqrt{2}$ ④ $\pm\sqrt{3}$ ⑤ ±2

해설

(i) $x \geq 0$일 때 $|x| = x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 + 3x - 4 = 0, (x+4)(x-1) = 0$
$\therefore x = -4$ 또는 $x = 1$
이 때, $x \geq 0$이므로 $x = -4$는 부적합
$\therefore x = 1$
(ii) $x < 0$일 때 $|x| = -x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$
$x = 4$ 또는 $x = -1$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -1$
$\therefore x = 1$ 또는 $x = -1$
이 때, $x < 0$이므로 $x = 4$는 부적합
(i), (ii)에서 $x = \pm 1$

11. x의 이차식 $x^2+(3a+1)x+2a^2-b^2$이 완전제곱식이고, a, b가 정수일 때, 순서쌍 (a, b)의 갯수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

완전제곱식이 되려면 판별식이 0이다.

$D=(3a+1)^2-4(2a^2-b^2)=0$

$a^2+6a+1+4b^2=0$

$\Rightarrow \quad (a+3)^2+(2b)^2=8$

a, b가 정수이므로

$a+3=\pm 2, \quad 2b=\pm 2$

$\therefore \quad a=-1, \ -5, \quad b=1, -1$

가능한 순서쌍 (a, b)의 갯수 : 4개

12. 이차방정식 $f(x)=0$의 두근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=6$이 성립한다. 이 때, 방정식 $f(5x-7)=0$의 두 근의 합은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0(a\neq 0)$에서

$f(5x-7)=a(5x-7-\alpha)(5x-7-\beta)=0$

$\therefore\ 5x=7+\alpha,\ 7+\beta$

$\therefore\ x=\dfrac{7+\alpha}{5},\ \dfrac{7+\beta}{5}$

따라서, 구하는 두 근의 합은

$\dfrac{14+\alpha+\beta}{5}=\dfrac{20}{5}=4$

13. $4x^2 - 3x + 2 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(3\alpha - 2)(3\beta - 2)$의 값을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = \frac{3}{4},\ \alpha\beta = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}(3\alpha - 2)(3\beta - 2) &= 9\alpha\beta - 6(\alpha + \beta) + 4 \\ &= 9 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{3}{4} + 4 \\ &= \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 4 = 4\end{aligned}$$

14. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 $\alpha,\ \beta$에 대하여 $\alpha+\beta=3$일 때, 방정식 $f(2x)=0$의 두 근의 합을 구하면?

① $-2+\sqrt{2}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{1}{2}$

④ 3 ⑤ $-1+\sqrt{3}$

해설

방정식 $f(2x)=0$ 에서 $2x=t$ 로 놓으면

$f(t)=0\cdots\cdots$㉠

㉠의 두 근이 $t=\alpha$ 또는 $t=\beta$이므로

$2x=\alpha$에서 $x=\dfrac{\alpha}{2}$, $2x=\beta$에서 $x=\dfrac{\beta}{2}$

따라서 방정식 $f(2x)=0$ 의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}$$

15. 이차함수$y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표가 각각 $0, -3$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와
직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표 $0, -3$ 은
이차방정식 $ax^2 - (b+5)x - a - 2 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두근의합}) = 0 + (-3) = \frac{b+5}{a}$$

$\therefore\ 3a + b = -5 \cdots$ ㉠

$$(\text{두 근의 곱}) = 0 \cdot (-3) = \frac{-a-2}{a}$$

$\therefore a = -2$

㉠에서 $b = 1$ 이므로 $a + b = -1$

16. $f(x) = x^2 - x + 1$일 때, $0 \le x \le 1$에서 $f(4 - f(x))$의 최솟값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$f(4 - f(x))$에서 $4 - f(x) = t$라 두면,

$t = -x^2 + x + 3$

$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$ $(0 \le x \le 1)$에서

$3 \le t \le \frac{13}{4}$

따라서

$$f(4 - f(x)) = f(t) = t^2 - t + 1$$
$$= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(3 \le t \le \frac{13}{4}\right)$$

$t = 3$일 때, 최솟값 7을 갖는다.

17. x, y, z가 실수일 때, $x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$의 최솟값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$
$=(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1$
이 때, x, y, z가 실수이므로
$(x+1)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0,\ (z-4)^2 \geq 0$
$\therefore x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25 \geq -1$
따라서 $x=-1,\ y=3,\ z=4$일 때,
주어진 식의 최솟값은 -1이다.

18. $2x^2 - 3xy + my^2 - 3x + y + 1$ 이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 상수 m 의 값은?

① -3　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 3

해설

$2x^2 - 3xy + my^2 - 3x + y + 1$

$= 2x^2 - (3y+3)x + my^2 + y + 1$

이 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로

$D = (3y+3)^2 - 8(my^2 + y + 1)$

$\quad = 9y^2 + 18y + 9 - 8my^2 - 8y - 8$

$\quad = (9-8m)y^2 + 10y + 1$

여기서 $D/4 = 25 - (9-8m) = 0$ 이어야 하므로

$25 - 9 + 8m = 0$

$8m = -16$

$\therefore m = -2$

19. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최솟값 4 를 가지고, 점 $(3,\ 6)$ 을 지난다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$= a(x-2)^2 + 4$$

점 $(3,\ 6)$ 을 지나므로 $a(3-2)^2 + 4 = 6$

$\therefore a = 2$

20. 이차함수 $y=x^2+mx+m$ 의 최솟값을 M 이라 할 때, M 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

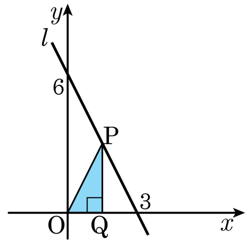
$$y=x^2+mx+m=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}+m$$

최솟값 $M=-\frac{m^2}{4}+m$

$$M=-\frac{m^2}{4}+m=-\frac{1}{4}(m-2)^2+1$$

$m=2$ 일 때, M 은 최댓값 1 을 갖는다.

21. 다음 그림과 같이 직선 l 위를 움직이는 점 P 가 있다. x 축 위에 내린 수선의 발을 Q 라고 할 때, $\triangle$POQ 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

직선 l 은 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 6)$ 을 지나므로

$y = -2x + 6$

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b = -2a + 6$

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{POQ} = \frac{1}{2}ab &= \frac{1}{2}a(-2a+6) \\ &= -a^2 + 3a \\ &= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\end{aligned}$$

한편, 점 P 는 제 1사분면 위의 점이므로

$a > 0,\ b = -2a + 6 > 0 \qquad \therefore\ 0 < a < 3$

따라서 $\triangle$POQ 의 넓이는 $a = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 갖는다.

22. 지면으로부터 45m 높은 곳에서 초속 40m 로 쏘아올린 물체의 x 초 후의 높이를 y m 라 할 때, $y = 45 + 40x - 5x^2$ 인 관계가 성립한다. 쏘아올린 물체가 다시 45m 지점을 지나는 시간은 몇 초 후인지 구하여라.

▶ **답 :** ______ 초 후

▷ **정답 :** 8초 후

해설

$y = 45$ 를 대입하면

$45 = 45 + 40x - 5x^2$

$5x^2 - 40x = 0$

$x^2 - 8x = 0$

$x(x - 8) = 0$

$x = 0$ 또는 $x = 8$

따라서 45m 지점을 지나는 시간은 8 초 후이다.

23. x에 대한 방정식 $x^2-2px+p+2=0$의 모든 근의 실수부가 음이 되도록 하는 실수 p의 값의 범위는?

① $-2<p<0$ ② $-2\le p<0$ ③ $-2<p\le 0$

④ $-2\le p\le 0$ ⑤ $0\le p<2$

해설

$x^2-2px+p+2=0$의 근은

$x=p\pm\sqrt{p^2-p-2}\cdots\cdots$ ㉠

(i) ㉠이 실근일 때

$p^2-p-2\ge 0,\ 2p<0,\ p+2>0$

$\therefore\ -2<p\le -1$

(ii) ㉠이 허근일 때

$p^2-p-2<0$이고 $p<0$

$\therefore\ -1<p<0$

이상에서 구하는 p의 조건은 $-2<p<0$

24. x에 대한 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 3$ 의 그래프가 k의 값에 관계없이 항상 직선 $y = ax + b$ 에 접한다. 이 때, 두 상수 a, b의 합 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 3 = ax + b$

$x^2 - (2k + a)x + k^2 + 2k - 3 - b = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 D = 0 이어야 하므로

$\mathrm{D} = (2\mathrm{k} + \mathrm{a})^2 - 4\left(\mathrm{k}^2 + 2\mathrm{k} - 3 - \mathrm{b}\right) = 0$

$4k(a - 2) + a^2 + 4b + 12 = 0$

위의 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므 로

$a - 2 = 0,\ a^2 + 4b + 12 = 0$

$\therefore a = 2,\ b = -4$

$\therefore a + b = -2$

25. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ 가 두 점 $(1,\ a+b)$, $(-3,\ -3a+b)$ 에서 만날 때, 함수 $h(x) = g(x) - f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -4

해설

두 함수의 그래프의 교점의 x 좌표가 1 과 -3 이므로 $ax + b = x^2 + cx + d$,
즉, $x^2 + (c - a)x + (d - b) = 0$ 은 두 근이 1, -3 이다.
근과 계수의 관계에 의해
$a - c = -2$, $d - b = -3$

$$\begin{aligned} \therefore\ h(x) &= g(x) - f(x) \\ &= x^2 + (c - a)x + (d - b) \\ &= x^2 + 2x - 3 \\ &= (x + 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

따라서 $x = -1$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.