1. $(x^4 - 8x^2 - 9) \div (x^2 - 9)$ 를 계산하여라.

① $x^2 + 1$ ② $x^2 - 1$ ③ $x^2 + 2$

④ $x^2 - 2$ ⑤ $x^2 + 3$

해설

$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 - 9)(x^2 + 1)$

$\therefore$ (준식)$= x^2 + 1$

2. $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b의 값은?

① $a=12,\ b=9$

② $a=-12,\ b=9$

③ $a=12,\ b=-9$

④ $a=-12,\ b=-9$

⑤ $a=9,\ b=12$

해설

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$으로 놓으면

이 식의 우변은

$x^4+2x^2(px+q)+(px+q)^2$

$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$

좌변과 계수를 비교하면

$2p=4,\ p^2+2q=-2$

$p=2,\ q=-3$에서

$a=2pq=-12,\ b=q^2=9$

3. $x^3-6x^2+11x-6$을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$ ② $(x-1)(x+2)(x+3)$

③ $(x-1)(x-2)(x-3)$ ④ $(x+1)(x+2)(x-3)$

⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면

$f(1)=0,\ f(2)=0,\ f(3)=0$이므로

(준식)$=(x-1)(x-2)(x-3)$

4. 두 다항식 $3x^4-2x^3-9x^2+4$, $3x^3-3x^2-6x$의 최대공약수를 구하면?

① $(x-1)(x-2)$ ② $(x+1)(x+2)$ ③ $(x+1)(x-2)$

④ $(x-1)(x-2)$ ⑤ $(x+1)(x-1)$

해설

$3x^4-2x^3-9x^2+4$

$=(x+1)(x-2)(x+1)(3x-2)$

$3x^3-3x^2-6x=3x(x-2)(x+1)$

$\therefore$ 최대공약수 : $(x-2)(x+1)$

5. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = 2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0 이어야 한다.

$$\begin{aligned} z &= 2(k-i)-k(1+i)^2 \\ &= 2k-2i-2ki \\ &= 2k-(2+2k)i \end{aligned}$$

허수 부분이 0이려면 $2+2k=0$ 이어야 한다.

따라서 $k=-1$

6. 실수 x, y에 대하여 $(1+i)x+(i-1)y=2i$일 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(1+i)x+(i-1)y=2i$

$(x-y)+(x+y)i=2i$

좌변과 우변이 같아야 하므로, $x-y=0,\ x+y=2$

두 식을 연립하여 풀어주면, $\therefore\ x=1,\ y=1$

$\therefore\ x+y=2$

7. $i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 50i^{50}$ 의 값은?

① $-26 - 25i$ ② $-26 + 25i$ ③ 0

④ $-25 + 26i$ ⑤ $25 + 26i$

해설

$i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 50i^{50}$

$= \{i + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-i) + 4 \cdot 1\} + \{5i + 6 \cdot (-1) + 7 \cdot (-i) + 8 \cdot 1\}$

$+ \cdots + \{45i + 46 \cdot (-1) + 47 \cdot (-i) + 48 \cdot 1\} + 49i + 50 \cdot (-1)$

$12(2 - 2i) + 49i - 50 = -26 + 25i$

8. 제곱해서 $5-12i$ 가 되는 복소수는?

① $\pm(2+3i)$ ② $\pm(2-3i)$ ③ $\pm(3-2i)$

④ $\pm(3+3i)$ ⑤ $\pm(3+3i)$

해설

구하려는 복소수를 $a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 로 놓으면

$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ 에서

$a^2 - b^2 + 2abi = 5 - 12i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2 - b^2 = 5$, $2ab = -12$ 에서

$ab = -6$, $b = -\dfrac{6}{a}$ 이므로

$a^2 - \left(-\dfrac{6}{a}\right)^2 = 5$, $a^2 - \dfrac{36}{a^2} = 5$

양변에 a^2 을 곱하면

$a^4 - 5a^2 - 36 = 0,\ (a^2-9)(a^2+4) = 0$

따라서 $a^2 = 9$ 또는 $a^2 = -4$ 이므로

$a = \pm 3$ 또는 $a = \pm 2i$

그런데 a 는 실수이므로 $a = \pm 3$ 이고, $b = \mp 2$ 이다.

따라서 구하는 복소수는 $\pm(3-2i)$ 이다.

9. $16x^4 - 625y^4$ 을 옳게 인수분해한 것은?

① $(x+5y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)$

② $(2x+y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)$

③ $(2x+5y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)$

④ $(x+5y)(x-5y)(4x^2+25y^2)$

⑤ $(2x+5y)(x-y)(4x^2+25y^2)$

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= (4x^2)^2 - (25y^2)^2 \\
&= (4x^2+25y^2)(4x^2-25y^2) \\
&= (2x+5y)(2x-5y)(4x^2+25y^2)
\end{aligned}
$$

10. 다음 □안에 들어갈 식이 바르게 연결되지 <u>않은</u> 것은?

$$
\begin{aligned}
&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\
&=(b-c)a^2-\boxed{\text{(가)}}\,a+\boxed{\text{(나)}}\,(b-c)\\
&=\boxed{\text{(다)}}\,\{a^2-\boxed{\text{(라)}}\,a+\boxed{\text{(나)}}\}\\
&=(b-c)(a-b)\boxed{\text{(마)}}
\end{aligned}
$$

① (가) (b^2-c^2) ② (나) bc ③ (다) $(b-c)$

④ (라) $(b+c)$ ⑤ (마) $(c-a)$

해설

$$
\begin{aligned}
&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\
&=(b-c)a^2+b^2c-ab^2+c^2a-bc^2\\
&=(b-c)a^2-\boxed{(b^2-c^2)}\,a+\boxed{bc}\,(b-c)\\
&=\boxed{(b-c)}\left\{a^2-\boxed{(b+c)}\,a+\boxed{bc}\right\}\\
&=(b-c)(a-b)\boxed{(a-c)}
\end{aligned}
$$

11. $10^2-9^2+8^2-7^2+6^2-5^2+4^2-3^2+2^2-1^2$ 의 값을 구하면?

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

해설

$$(10-9)(10+9)+(8-7)(8+7)+(6-5)(6+5)$$
$$+(4-3)(4+3)+(2-1)(2+1)$$
$$=10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=55$$

12. 두 다항식 $x^3+2x^2-x-2, 2x^3+(a-2)x^2-2x$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

해설

$x^3+2x^2-x-3=x^2(x+2)-(x+2)$

$=(x+2)(x-1)(x-2)$

$2x^3+(a-2)x^2-2x=x(2x^2+(a-2)x-2)\cdots ①$

두 식의 최대 공약수가 이차식이므로

$x=-2,-1,1$ 을 ①식에 대입하면

식의 값이 동시에 0이 되는 경우가 있어야 한다.

$x=-2$일 때, $8-2a+4-2=0,\ a=5$

$x=-1$일 때, $2-a+2-2=0,\ a=2$

$x=1$일 때, $2+a-2-2=0,\ a=2$

$x=-1,\ 1$ 일때, 일치함

최대 공약수는 $(x+1)(x-1)$

$\therefore\ a=2$

13. $\dfrac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}}$의 값은?

① $1-\sqrt{2}$　② $-1-\sqrt{2}$　③ $(1+\sqrt{2})i$

④ $-(1+\sqrt{2})i$　⑤ $(1-\sqrt{2})i$

해설

$$\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{1}{i}$$
$$= (\sqrt{2}+1) \times (-i)$$
$$= -(1+\sqrt{2})i$$

14. $z=(1+i)x^2+(2-i)x-8-2i$에 대하여 $z^2<0$을 만족하는 실수 x의 값을 구하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

$z=(x^2+2x-8)+(x^2-x-2)i$

$\quad=(x-2)(x+4)+(x+1)(x-2)i$

그런데, $z^2<0$에서 z는 순허수이므로

$\therefore\ x=-4$

15. 복소수 $(1+i)x^2-(1-4i)x-(2-3i)$가 실수일 때의 x값과 순허수일 때의 x값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$(x^2-x-2)+(x^2+4x+3)i$

실수가 되기위해서는 $x^2+4x+3=0$

$(x+1)(x+3)=0 \therefore \ x=-3, \ -1$

순허수가 되기 위해서는

$x^2-x-2=0$이고 $x^2+4x+3\neq 0$

$x=-1, \ 2$이고 $x\neq -3, \ -1 \therefore \ x=2$

$(-3)\times(-1)\times 2=6$

16. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{x+i}{x-i}$ 를 만족하는 실수 x의 값은 ?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ -5

해설

$(1+\sqrt{3}i)(x-i)=2(x+i)$

$(x+\sqrt{3})+(\sqrt{3}x-1)i=2x+2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+\sqrt{3}=2x,\ \ \sqrt{3}x-1=2$

$\therefore\ x=\sqrt{3}$

17. $\bar{z}=-z$ 를 만족하는 z 에 대하여 $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ 이라 할 때, $w\bar{w}$ 의 값을 구하여라. (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1

해설

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$

$\bar{z}=-z$ 이므로 $a-bi=-(a+bi)$

$a-bi=-a-bi$, $2a=0$

따라서 $a=0$ 이므로 $z=bi$

$z=bi$ 를 $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ 에 대입하면

$$w=\frac{-1+bi}{1+bi},\ \bar{w}=\overline{\left(\frac{-1+bi}{1+bi}\right)}=\frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ w\bar{w}&=\frac{-1+bi}{1+bi}\cdot\frac{-1-bi}{1-bi}\\&=\frac{-1+bi}{1+bi}\cdot\frac{-(1+bi)}{-(-1+bi)}\\&=\frac{-1+bi}{1+bi}\cdot\frac{1+bi}{-1+bi}=1\end{aligned}$$

18. $xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$ 을 인수분해하면?

① $-(x-y)(y-z)(z-x)$ ② $-(x+y)(y-z)(z-x)$

③ $-(x-y)(y+z)(z-x)$ ④ $-(x-y)(y-z)(z+x)$

⑤ $-(x-y)(y+z)(z+x)$

해설

(준 식)$= xy(x-y)+zx(z-x)+yz(y-z)$

$= yx^2-y^2x+z^2x-zx^2+yz(y-z)$

$= (y-z)x^2-(y^2-z^2)x+yz(y-z)$

$= (y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+yz(y-z)$

$= (y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$

$= (y-z)(x-y)(x-z)$

$= -(x-y)(y-z)(z-x)$

19. $x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$을 이용하여 다음 식의 값을 구하면?

$$\frac{(11^4+324)(23^4+324)(35^4+324)(47^4+324)}{(5^4+324)(17^4+324)(29^4+324)(41^4+324)}$$

① 192 ② 193 ③ 194 ④ 195 ⑤ 196

해설

$x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$

$=\{(x-y)^2+y^2\}\{(x+y)^2+y^2\}$ 이고,

$324=4\times 3^4$ 이므로

$11^4+324=(11^2-2\times 11\times 3+2\times 3^2)(11^2+2\times 11\times 3+2\times 3^2)$

$=\{(11-3)^2+3^2\}\{(11+3)^2+3^2\}$

$=(8^2+3^2)(14^2+3^2)$

따라서 차례대로 모두 정리해 보면 주어진 식은

$$\frac{\{(8^2+3^2)(14^2+3^2)\}\{(20^2+3^2)(26^2+3^2)\}}{\{(2^2+3^2)(8^2+3^2)\}\{(14^2+3^2)(20^2+3^2)\}}$$

$$\frac{\{(32^2+3^2)(38^2+3^2)\}\{(44^2+3^2)(50^2+3^2)\}}{\{(26^2+3^2)(32^2+3^2)\}\{(38^2+3^2)(44^2+3^2)\}}$$

$$=\frac{50^2+3^2}{2^2+3^2}=\frac{2509}{13}=193$$

20. $a(a+1)=1$ 일 때, $\dfrac{a^6-1}{a^4-a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\frac{a^6-1}{a^4-a^2}=\frac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)}$$

$$=\frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2=1-a \text{ 대입}$$

$$=\frac{2(1-a)\times 2}{1-a}=4$$

21. 두 다항식 $A = x^3 + ax^2 - 4x + 2$ 와 $B = x^3 + bx^2 - 2$ 의 최대공약수가 이차식일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① -3 ② -1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 7

해설

$A = Gf(x), B = Gg(x)$ 라 하면

$A + B = G(f(x) + g(x)), A - B = G(f(x) - g(x))$ 이므로

공통인수는 G 를 포함한다.

$$\begin{cases} A + B = 2x^3 + (a+b)x^2 - 4x \\ \qquad\qquad = x\{2x^2 + (a+b)x - 4\} \\ A - B = (a-b)x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$A + B$ 에서 x 는 $A - B$ 의 인수가 아니므로 G 가 될 수 없다.

그러므로 $G = 2x^2 + (a+b)x - 4$

$\therefore\ A - B = -G = -2x^2 - (a+b)x + 4$

계수비교하면 $a - b = -2,\ a + b = 4$

22. $|x|(2+3i)+2|y|(1-2i)=6-5i$를 만족하는 실수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$(2|x|+2|y|)+(3|x|-4|y|)i=6-5i$

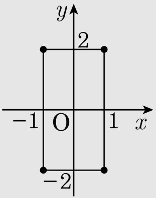
복소수의 상등에 의하여

$|x|+|y|=3,\ 3|x|-4|y|=-5$

두 식을 연립하면

$|x|=1,\ \ |y|=2$

$(x,\ y)\ \rightarrow\ (1,\ 2),\ (1,-2),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ -2)$



$\therefore$ 직사각형의 넓이 $=2\times4=8$

23. $a-b=2-\sqrt{3}$, $b-c=2+\sqrt{3}$인 세 수 a, b, c에 대하여 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$의 값은?

① 4　　② 3　　③ 1　　④ -2　　⑤ -3

해설

$a-b=2-\sqrt{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$b-c=2+\sqrt{3}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 계산하면 $a-c=4$

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$

$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+b^2c-c^2b$

$=a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\cdot 4=4$

24. 방정식 $ax^2+ibx+c=0$에 대하여 다음 설명 중 타당한 것은?

① z가 주어진 방정식의 근이면 $\overline{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

② z가 주어진 방정식의 근이면 $i\overline{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

③ z가 주어진 방정식의 근이면 $i\overline{z}$는 $ax^2+bx+c=0$의 근이다.

④ z가 주어진 방정식의 근이면 $-\overline{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

⑤ z가 주어진 방정식의 근이면 $-i\overline{z}$는 $ax^2+bx+c=0$의 근이다.

해설

z가 주어진 방정식의 근이라면
$a,\ b,\ c$는 실수이므로 켤레복소수의 성질을 적용하면
$az^2+ibz+c=0,\ \overline{az^2+ibz+c}=0$
$a\overline{(z^2)}-ib\overline{z}+c=0,$
$a(-\overline{z})^2+ib(-\overline{z})+c=0$이므로
$-\overline{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

25. $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, y=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x^5+y^5=-1$	㉡ $x^9+y^9=-1$
㉢ $x^{11}+y^{11}=-1$	

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, y=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

각각 양변에 2을 곱하고 -1을 이항한 후 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+x+1=0, y^2+y+1=0$

$x^2=-x-1\cdots①$

①의 양변에 x 를 곱하면

$x^3=-x^2-x=-(x^2+x)=1$ ($\because$ $x^2+x=-1$)

$x^3=1$, y 에 대해서도 마찬가지로 하면 $y^3=1$

또한 $x+y=-1, xy=1$

$$
\begin{aligned}
㉠ x^5+y^5 &= x^3\cdot x^2+y^3\cdot y^2 \\
&= x^2+y^2 \\
&= (x+y)^2-2xy \\
&= -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
㉡ x^9+y^9 &= (x^3)^3+(y^3)^3 \\
&= 1+1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
㉢ x^{11}+y^{11} &= (x^3)^3\times x^2+(y^3)^3\times y^2 \\
&= x^2+y^2 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

※다음과 같은 과정으로 필요한 값을 얻을 수 있다.

$x^2+x+1=0, y^2+y+1=0$ 에서

각각 양변에 $x-1, y-1$ 을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0, (y-1)(y^2+y+1)=0$

$x^3-1=0, y^3-1=0$

$\therefore$ $x^3=y^3=1$

해설

이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용할 수도 있다.

x 와 y 를 X 에 대한 이차방정식의 두 근이라고 한다면 $x+y=-1$, $xy=1$ 이므로

$X^2+X+1=0 \Rightarrow X^3=1 \therefore$ $x^3=1$, $y^3=1$