1. 다음 중 $a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c$ 의 인수인 것은?

① $a - b + c$ ② $c - a$ ③ $b + c$

④ $a - b$ ⑤ $c - b + a$

해설

$$\begin{aligned} a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c &= a^3 - ab^2 + a^2c - b^2c \\ &= a(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)c \\ &= (a - b)(a + b)(a + c) \end{aligned}$$

2. 다음 중 다항식 $x^4 - 8x^2 - 9$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x - 3$

② $x + 3$

③ $x^2 + 1$

④ $x^2 + 9$

⑤ $x^3 + 3x^2 + x + 3$

해설

준 식을 인수분해 하면

$$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 + 1)(x^2 - 9)$$
$$= (x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$$

⑤ $x^2(x + 3) + x + 3 = (x^2 + 1)(x + 3)$

3. x에 대한 다항식 x^3-2x^2-x+2가 $(x+a)(x+b)(x+c)$로 인수분해 될 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, a, b, c는 상수)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-1)(x-2)$

$a^2+b^2+c^2=(-1)^2+1^2+2^2=6$

4. 두 다항식 $2x^2+2x-4$와 $4x^3-4$에 관한 설명이다. 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① 두 다항식은 $(x-1)$로 나누어 떨어지므로, $(x-1)$은 두 다항식의 공약수이다.

② 두 다항식은 공약수가 있으므로 서로소가 아니다.

③ $4(x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)$은 두 다항식의 공배수이다.

④ 두 다항식의 최대공약수는 $2(x-1)$이다.

⑤ 두 다항식의 최소공배수는 $(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)$이다.

해설

$2x^2+2x-4=2(x-1)(x+2)$
$4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$
최대공약수 : $2(x-1)$
최소공배수 : $4(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$

5. 두 다항식 $x^2-4x+3a+b$와 x^2+bx-6의 최대공약수가 $x-2$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 8

해설

$f(x)=x^2-4x+3a+b$,
$g(x)=x^2+bx-6$이라 하면
$f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x-2$로 나누어떨어지므로
$f(2)=g(2)=0$에서
$f(2)=4-8+3a+b=0,\ g(2)=4+2b-6=0$
$\therefore\ a=1,\ b=1\ \therefore\ a+b=2$

6. $i(x+2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① ±1 ② ±2 ③ ±3 ④ ±4 ⑤ ±5

해설

$$\begin{aligned} i(x+2i)^2 &= i(x^2+4ix-4) = x^2 i - 4x - 4i \\ &= -4x + (x^2-4)i \end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.

$\therefore\ x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm2$

7. 복소수 $z = (2+i)a^2 + (1+4i)a + 2(2i-3)$ 이 순허수일 때, 실수 a 의 값은?

① -2 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$z = (2a^2 + a - 6) + (a^2 + 4a + 4)i$

순허수이므로 $2a^2 + a - 6 = 0$

$\Rightarrow \quad (a+2)(2a-3) = 0$

$\Leftrightarrow \; a = -2$ 또는 $a = \frac{3}{2}$

그런데 $a = 2$ 이면,

$a^2 + 4a + 4 = 0$ 이 되어 순허수가 성립되지 않는다.

$\therefore \quad a = \frac{3}{2}$

8. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$

$=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$

순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분)$\neq 0$이어야 하므로

$x^2-x-2=0$, $x^2-3x+2\neq 0$

(i) $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $x^2-3x+2\neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2)\neq 0$

$\therefore\ x\neq 1$ 또는 $x\neq 2$

따라서 (i), (ii) 에 의하여 $x=-1$

9. $(1+ai)^2 = 2i$ (a 는 실수)라 할 때 $(1+ai)(1-ai)$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(1+ai)^2 = 2i$ 에서 $(1-a^2)+2ai = 2i$

복소수의 상등에서 $1-a^2 = 0,\ 2a = 2$

$\therefore\ a = 1$

$$\begin{aligned}\therefore\ (1+ai)(1-ai) &= (1+i)(1-i)\\ &= 1-(-1)\\ &= 2\end{aligned}$$

10. x, y가 실수일 때, $(1+i)x+(1-i)y=\dfrac{2-i}{1+i}$을 만족하는 x, y의 값은?

① $x=-\dfrac{1}{2},\ y=1$ ② $x=\dfrac{1}{2},\ y=1$ ③ $x=1,\ y=-\dfrac{1}{2}$

④ $x=1,\ y=1$ ⑤ $x=1,\ y=\dfrac{1}{2}$

해설

$$(x+y)+(x-y)i=\frac{2-i}{1+i}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

$$\Rightarrow \quad x+y=\frac{1}{2},\quad x-y=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2},\quad y=1$$

11. $2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$를 인수분해 하면$(x+ay+b)(2x+cy+d)$이다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

$2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-3y^2+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-(y-2)(3y+1)$
$=\{x-(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}$
$=(x-y+2)(2x+3y+1)$
$\therefore\ a=-1, b=2, c=3, d=1$

12. a, b, c가 삼각형의 세변의 길이를 나타내고 $ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$인 관계가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=b$인 이등변 삼각형
② $a=c$인 이등변 삼각형
③ 정삼각형
④ a가 빗변인 직각 삼각형
⑤ b가 빗변인 직각 삼각형

해설

$$ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$$
$$a^2b+ab^2-bc(b+c)-ac^2+a^2c=0$$
$$(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b+c)=0$$
$$(b+c)\left\{a^2+(b-c)a-bc\right\}$$
$$=(b+c)(a+b)(a-c)=0$$

13. $\dfrac{2012^3+1}{2012\times2011+1}$ 의 값을 a라 할 때, $\dfrac{a+1}{a-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1007}{1006}$

해설

$$a=\frac{(2012+1)(2012^2-2012+1)}{(2012^2-2012+1)}$$

$=2013$ 이므로

$$\therefore\ \frac{a+1}{a-1}=\frac{2013+1}{2013-1}=\frac{2014}{2012}=\frac{1007}{1006}$$

14. x^2+ax-9와 x^2+bx+c의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9이다. $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A=x^2+ax-9=Gp$

$B=x^2+bx+c=Gq$라 하면

$A+B=(p+q)G=2x^2-4x-6=2(x+1)(x-3)$

$L=pqG=x^3-x^2-9x+9=x^2(x-1)-9(x-1)$

$=(x-1)(x^2-9)=(x-1)(x+3)(x-3)$

따라서, $G=x-3,\ p=x+3,\ q=x-1$이다.

$\therefore\ A=(x+3)(x-3)=x^2-9$

$\quad B=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

$\therefore\ a=0,\ b=-4,\ c=3$

$\therefore\ a-b+c=7$

15. 두 다항식 A, B에 대하여 $A = x^2 + ax + 2$, $B = x^2 + bx + c$이고 A, B의 최대공약수가 $x+1$, 최소공배수가 $x^3 + 2x^2 - x - 2$일 때, $a+b+c$의 값은?

① -1　　② 0　　③ 2　　④ -2　　⑤ 3

해설

$A = m(x+1)$, $B = n(x+1)$이라 놓으면

$mn(x+1) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$\therefore\ mn = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

$\therefore\ m = x+2$, $n = x-1$ 또는 $m = x-1$, $n = x+2$

$A = (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$

$B = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$

여기서, $a = 3$, $b = 0$, $c = -1$

$\therefore\ a+b+c = 2$

16. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2-8$이고, 최소공배수가 x^3-2x^2-5x+6이다. 두 다항식의 상수항을 a, b라 할 때, ab의 값은?

① -8　② -3　③ 0　④ 6　⑤ 12

해설

두 다항식의 합에도 최대공약수가 들어 있으므로

$2x^2-8=2(x-2)(x+2)$

$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)$

따라서 두 다항식의 최소공배수는 $x+2$이고 두 다항식의 차수가 같으므로 두 다항식은 이차식이다.

$(x+2)(x-1)=x^2+x-2$

$(x+2)(x-3)=x^2-x-6$

$\therefore\ ab=(-2)\times(-6)=12$

17. 두 다항식 A, B의 최대공약수를 $A\bigstar B$라 할 때 $\dfrac{AB\bigstar B^2}{A\bigstar B}$를 간단히 하면?

① A ② B ③ AB ④ A^2 ⑤ B^2

해설

$A\bigstar B=G$라 하면, $A=aG, B=bG$이고, a, b는 서로소이다.

$$\frac{AB\bigstar B^2}{A\bigstar B}=\frac{abG^2\bigstar b^2G^2}{G}=\frac{bG^2}{G}=bG=B$$

18. 두 다항식 A, B 의 최대공약수 G 를 $A \bigcirc B$, 최소공배수 L 을 $A \bigstar B$ 로 나타내기로 할 때, 다음 계산 과정의 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

$A = aG$, $B = bG$ (a, b 는 서로소)
$A^2 \bigcirc AB =$ [(가)], $A^2 \bigcirc B^2 =$ [(나)]
$\therefore \left(A^2 \bigcirc AB\right) \bigstar \left(A^2 \bigcirc B^2\right) =$ [(다)]

① A, G^2, A　② aG^2, G, A　③ A, AB, AG
④ aG^2, G^2, AG　⑤ G, G, AB

해설

(가) $= A^2 \bigcirc AB =$ (G^2a^2 과 G^2ab 의 최대공약수)
$= aG^2$
(나) $= A^2 \bigcirc B^2 =$ (G^2a^2과G^2b^2 의 최대공약수)
$= G^2$
(다) $= \left(A^2 \bigcirc AB\right) \bigstar \left(A^2 \bigcirc B^2\right)$
$=$ ((가) 와 (나) 의 최소공배수) $= aG^2 = AG$

19. $\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=a+bi$ 일 때, a^2+b^2 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 15　　② 25　　③ 35　　④ 45　　⑤ 55

해설

$\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$

$=2\sqrt{3}i-3\sqrt{2}+\sqrt{3}i$

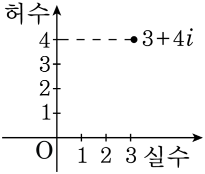
$=-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}i$

$=a+bi$

따라서, $a=-3\sqrt{2}, b=3\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=18+27=45$

20. 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)를 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내어 좌표평면 위에 표시할 수 있다. 예를 들어 $3+4i$를 $(3,\ 4)$로 나타내면 다음 그림과 같이 표시할 수 있다. $z=1+i$일 때, 0, z, z^2 이 나타내는 점을 각각 A, B, C 라 할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인가? (단, 가장 정확하게 표시한 것을 하나만 고른다.)



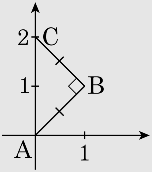
① 정삼각형 ② 이등변삼각형

③ 직각삼각형 ④ 직각이등변삼각형

⑤ 답 없음

해설

$z = 1+i \quad z^2 = 2i \Rightarrow \quad B(1,\ 1),\ C(0,\ 2)$



$\Rightarrow$ 직각이등변삼각형

※ 이와 같이 복소수의 실수부와 허수부를 순서쌍으로 좌표평면에 나타내는 것을 복소평면이라 한다.

21. 복소수 $(1+i)x^2-(2+i)x-3-2i$를 제곱하면 음의 실수가 된다고 할 때, 실수 x의 값은?

① -1　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

(준식)$=x^2-2x-3+(x^2-x-2)i$
이것을 제곱해서 음의 실수가 되려면 순허수이어야 하므로
$x^2-2x-3=0 \cdots$㉠, $x^2-x-2\neq 0 \cdots$㉡
㉠에서 $x=3,\ x=-1$
이 중에서 ㉡를 만족하는 것은 $\therefore\ x=3$

22. 실수 x, y 에 대하여 $\dfrac{x}{1+i}+\dfrac{y}{1-i}=2-i$ 가 성립할 때, $2x+y$ 의 값은?

① 8 ② 7 ③ 5 ④ 4 ⑤ 2

해설

$$\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=\frac{x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{(x+y)+(-x+y)i}{2}$$

$\therefore \dfrac{(x+y)+(-x+y)i}{2}=2-i$이므로,

복소수의 상등에서 $x+y=4,\ -x+y=-2$

이것을 풀면 $x=3,\ y=1$

따라서, $2x+y=2\times 3+1=7$

23. 복소수 전체의 집합에서 두 복소수 α, β 에 대하여 연산 $\circledcirc$을 $\alpha \circledcirc \beta = (\alpha + i)(\beta + i)$ 로 정의할 때, 등식 $(2+i) \circledcirc z = 1$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $-\frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$　② $-i$　③ i
④ $1+i$　⑤ $\frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$

해설

$$(2+i) \circledcirc z = \{(2+i)+i\}(z+i)$$
$$= (2+2i)(z+i) = 1$$

$z + i = \frac{1}{2+2i}$ 이므로

$$z = \frac{1}{2+2i} - i$$
$$= \frac{(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} - i$$
$$= \frac{2-2i-8i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$$

24. 1999개의 다항식 $x^2-2x-1,\ x^2-2x-2,\ \cdots,\ x^2-2x-1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

① 43개 ② 44개 ③ 45개 ④ 46개 ⑤ 47개

해설

$x^2-2x-n=(x+a)(x-b)$ ($a,\ b$는 자연수)라 하면 ($1 \le n \le 1999$인 자연수)

$ab=n,\ \ a=b-2$

$\therefore n=1\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 5,\ \cdots,\ 43\cdot 45(=1935)$의 43개

25. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k$가 이차식의 완전제곱식으로 인수분해 될 때, 상수 k의 값을 정하면?

① -1 ② 1 ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k$
$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-k$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-k$
$x^2+5x=X$로 치환하면
(준식) $=(X+4)(X+6)-k$
$=X^2+10X+24-k$
완전제곱식이 되려면 $24-k=25$
$\therefore\ k=-1$

26. $a-b=3$, $b-c=1$일 때, $ab^2-a^2b+bc^2-b^2c+ca^2-c^2a$의 값은?

① -14 ② -12 ③ -8 ④ -4 ⑤ 0

해설

$a-b=3 \quad \cdots ㉠, \quad b-c=1 \quad \cdots ㉡$

㉠+㉡에서 $a-c=4$

$\therefore \ ab^2-a^2b+bc^2-b^2c+ca^2-c^2a$

$=ab(b-a)+c^2(b-a)-c(b^2-a^2)$

$ab(b-a)+(b-a)\{c^2-c(b+a)\}$

$=(b-a)(ab+c^2-bc-ca)$

$=(b-a)\{a(b-c)+c(c-b)\}$

$=(b-a)(b-c)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$

$=3\times1\times(-4)=-12$

27. 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $[a,\ b,\ c]=a^2+bc$라 하고 $x+y+z=10$, $x^2+y^2+z^2=12$일 때, $[x,\ 2y,\ z]+[y,\ 2z,\ x]+[z,\ 2x,\ y]$의 값은?

① 10 ② 22 ③ 88 ④ 100 ⑤ 144

해설

$$[x,\ 2y,\ z]+[y,\ 2z,\ x]+[z,\ 2x,\ y]$$
$$=x^2+2yz+y^2+2zx+z^2+2xy$$
$$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$
$$=(x+y+z)^2=100$$

28. x^2 의 계수가 1 인 두 이차 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 의 합이 $2x^2+5x-3$ 이고 최소공배수가 x^3+2x^2-5x-6 이다. $f(0)=3$, $g(0)=-6$ 일 때, $f(2)+g(-1)$ 의 값은?

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$f(x)+\ g(x)=2x^2+5x-3$
$f(x)=Ga, g(x)=Gb$ (a, b는 서로소)
$G(a+b)=(2x-1)(x+3)$
최소공배수 $Gab=(x+3)(x-2)(x+1)$
$f(x)=(x+3)(x+1)$ $(\Leftarrow\ f(0)=3)$
$g(x)=(x+3)(x-2)$ $(\Leftarrow\ g(0)=-6)$
$\therefore\ f(2)+g(-1)=15+(-6)=9$

29. 10 이하의 자연수 n에 대해, $\dfrac{(1+i)^{2n}}{2^n}=-1$ 을 만족하는 모든 n의 총합은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$$\frac{(1+i)^{2n}}{2^n}=\frac{\{(1+i)^2\}^n}{2^n}=\left(\frac{2i}{2}\right)^n=i^n$$

$i^n=-1$ 이므로 $n=4k+2(k=0,1,2,3,\cdots)$

n이 10 이하의 자연수이므로 $n=2,6,10$

$\therefore\ 2+6+10=18$

30. $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$, $|a+b| > |c|$인 a, b, c에 대하여 $\sqrt{(a+b+c)^2} - |a+b| - \sqrt{c^2}$의 값은?

① $2a$　　② $2b$　　③ $-2c$　　④ $-2a$　　⑤ $-3b$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로, $a \le 0,\ b \le 0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$ 이므로, $b < 0,\ c \ge 0$

$|a+b| > |c|$ 이므로, $-(a+b) > 0$

$\therefore\ a+b+c < 0$

$$\begin{aligned}\therefore(\text{주어진 식}) &= |a+b+c| - |a+b| - |c| \\ &= -(a+b+c) + (a+b) - c \\ &= -2c\end{aligned}$$

31. 복소수 α,β 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단 $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

> ㉠ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.
>
> ㉡ $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.
>
> ㉢ $\overline{\alpha}=\alpha$ 이면 α 는 실수이다.
>
> ㉣ $\overline{a}=\beta$ 이면 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

① ㉠,㉡,㉢ ② ㉠,㉢,㉣ ③ ㉡,㉢,㉣

④ ㉠,㉡,㉢,㉣ ⑤ ㉢,㉣

해설

㉠ 반례 : $\alpha=1,\beta=i$ 일 때 $\alpha^2+\beta^2=0$

㉡ 반례 : $\alpha=1,\beta=i$ 일 때 $\alpha+\beta i=0$

㉢ $\overline{\alpha}=\alpha \rightarrow \alpha$ 는 실수(참)

㉣ $\alpha=a+bi,\ \overline{a}=\beta=a-bi$($a,b$는 실수)

$\alpha+\beta=2a$(실수), $\alpha\beta=a^2+b^2$(실수) (참)

32. 복소수 α, β 는 $\alpha\overline{\alpha} = 1$, $\beta\overline{\beta} = 1$ 을 만족하고 $\alpha + \beta = i$ 이다. 이 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$\alpha + \beta = i$에서 $\overline{\alpha + \beta} = \overline{i}$ $\quad \therefore\ \overline{\alpha} + \overline{\beta} = -i$

$\alpha\overline{\alpha} = 1,\ \beta\overline{\beta} = 1$에서 $\overline{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha},\ \overline{\beta} = \dfrac{1}{\beta}$

$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \quad \therefore\ \alpha\beta = -1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = i^2 - 2 \cdot (-1) = 1$

33. 복소수 α의 실수부가 양이고, $\alpha^3 = i$일 때, $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$의 값을 구하면? (단, $i^2 = -1$)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

$\alpha = a + bi$ ($a,\ b$는 실수)라 하면

$\alpha^3 = (a+bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i = i$

$a(a^2 - 3b^2) = 0 \cdots$ ㉠

$b(3a^2 - b^2) = 1 \cdots$ ㉠

$a > 0$ 이므로 $a^2 = 3b^2$ 을 ㉡에 대입하면

$b(9b^2 - b^2) = 1,\ 8b^3 = 1$

$$\therefore\ b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a = \sqrt{3}b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\therefore\ \alpha + \frac{1}{\alpha} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \sqrt{3}$$