

1. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\emptyset) = n(\{0\})$

② $n(\{1, 2, 4\}) - n(\{1, 4\}) = 2$

③ $n(\{4\}) = 4$

④ $n(\{x|x \text{는 } 40 \text{ 이하의 짝수}\}) = 40$

⑤ $n(\{x|x \text{는 } 2 < x < 4 \text{인 홀수}\}) = 1$

해설

① $n(\emptyset) = 0, n(\{0\}) = 1$

② $n(\{1, 2, 4\}) - n(\{1, 4\}) = 3 - 2 = 1$

③ $n(\{4\}) = 1$

④ $n(\{2, 4, 6, \dots, 40\}) = 20$

⑤ $n(\{3\}) = 1$

2. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 보다 크고, } 15 \text{ 보다 작은 홀수}\}$ 의 부분집합의 개수는?

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$A = \{11, 13\}$ 이므로 부분집합의 개수는 원소의 개수만큼 2를 곱한 값과 같으므로
 $2^2 = 2 \times 2 = 4$ (개)이다.

3. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = \{x | x \text{는 } 7 \text{보다 작은 자연수}\}$, $A = \{x | x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$ 일 때, 다음 중 집합 B 가 될 수 없는 것은?

① $\{4, 5\}$

② $\{2, 4, 5, 6\}$

③ $\{x | x \text{는 } 2 \leq x < 7 \text{인 자연수}\}$

④ $\{x | x \text{는 } 7 \text{미만의 소수}\}$

⑤ $\{x | x \text{는 } 5 \text{이하의 자연수}\}$

해설

집합 $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로 집합 B 는 원소 4, 5를 반드시 포함하는 $A \cup B$ 의 부분집합이다.

④ $\{x | x \text{는 } 7 \text{미만의 소수}\} = \{2, 3, 5\} \not\ni 4$

4. 다음 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 바르게 나타낸 것은?

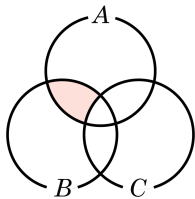
① $(B - C) \cup A^c$

② $A \cap (B \cap C^c)$

③ $A - (B \cup C)$

④ $(A \cup B) - C$

⑤ $(B - C) - A$



해설

직관적으로 보면 빗금친 부분은 $(A \cap B) - C$

$$(A \cap B) - C = (A \cap B) \cap C^c$$

$$= A \cap (B \cap C^c)$$

5. 전체집합 U 와 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cup B = B$, $B - A = \emptyset$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \subset B$

② $A \supset B$

③ $A - B = \emptyset$

④ $A \cap B = A$

⑤ $A \cup B = U$

해설

$$A \cup B = B, B - A = \emptyset,$$

즉 각각이 $A \subset B, B \subset A$ 를 의미하여 $A = B$ 임을 나타낸다.

따라서, $A \subset B, B \subset A$ 가 가지는 성질인 ①, ②, ④의 성질과 같은 집합임을 나타내는 ③도 성립하게 되는데, ⑤에서는 A^c 또는 B^c 이 존재하기 때문에 $A \cup B = U$ 는 거짓이다.

6. 1부터 800까지의 자연수 중에서 800과 서로소인 수의 개수를 구하면?

① 310 개

② 320 개

③ 330 개

④ 340 개

⑤ 350 개

해설

$800 = 2^5 \times 5^2$ 으로 소인수분해가 된다.

800과 서로소가 되려면 2나 5를 인수로 가져서는 아니되므로 1부터 800까지의 수 중에서 2 또는 5의 배수의 개수를 계산하여 여사건을 이용하면 된다.

2의 배수의 집합을 A , 5의 배수의 집합을 B 라 하면

$$\begin{aligned}n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\&= 400 + 160 - 80 = 480\end{aligned}$$

따라서 800과 서로 소인수의 개수는

$800 - 480 = 320$ (개)이다.

7. 180 과 600 의 공약수의 개수는 모두 몇 개인가?

① 8개

② 9개

③ 10개

④ 11개

⑤ 12개

해설

두 수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수이므로

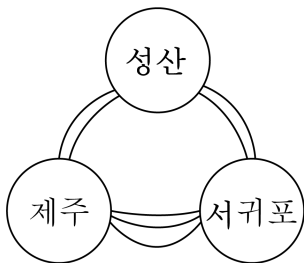
$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ 이고,

$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$ 에서

최대공약수 $G.C.D. = 2^2 \times 3 \times 5$ 이고

따라서 공약수의 개수는 12

8. 다음 그림과 같이 제주와 성산을 잇는 길은 2 개 성산과 서귀포를 잇는 길은 2 개가 있고, 제주와 서귀포를 잇는 길은 3 개가 있다. 제주에서 서귀포로 갔다가 다시 제주로 돌아올 때, 성산을 반드시 1 번만 거치는 경우의 수는?



① 12

② 18

③ 24

④ 30

⑤ 32

해설

$$(2 \times 2) \times 3 + 3 \times (2 \times 2) = 24$$

∴ 24 가지

9. 100 원, 300 원, 500 원짜리 3 종류의 사탕이 있다. 이 사탕을 1000 원어치 사는 방법의 수는?

- ① 7개 ② 10개 ③ 13개 ④ 15개 ⑤ 17개

해설

500 원을 기준으로 생각한다.

100 원을 A , 300 원을 B 라 하면,

(1) 500 원 0개 :

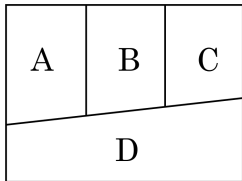
$$(A, B) = (1, 3), (4, 2), (7, 1), (10, 0)$$

(2) 500 원 1개 : $(A, B) = (2, 1), (5, 0)$

(3) 500 원 2개 : $(A, B) = (0, 0)$

$\therefore$ 총 7개

10. 다음 그림의 네 부분에 4 가지 색을 사용하여 색칠을 하려고 한다. 한 가지 색을 여러 번 쓸 수 있고, 인접한 부분은 서로 다른 색이 칠해져야 한다면 칠하는 방법은 몇 가지인가?



① 24

② 48

③ 72

④ 96

⑤ 108

해설

가장 영역이 넓은 D 영역부터 칠한다면,

$$4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$$

∴ 48 가지

11. 초등학생 2 명, 중학생 2 명, 고등학생 2 명을 일렬로 세울 때, 초등학생 2 명은 이웃하고, 중학생 2 명은 이웃하지 않도록 세우는 방법의 수는?

① 72

② 84

③ 96

④ 120

⑤ 144

해설

초등학생 2 명과 중학생 2 명을 각각 함께 묶어서 4 명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$$4! \times 2! \times 2 = 96 \text{ (가지)}$$

초등학생 2 명만 함께 묶어서 5 명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$$5! \times 2 = 240 \text{ (가지)}$$

따라서 구하는 방법의 수는 $240 - 96 = 144$ (가지)

12. a, b, c, d, e의 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, c가 d보다 앞에 오게 되는 방법의 수는?

① 24

② 30

③ 60

④ 72

⑤ 120

해설

c와 d를 같은 문자로 생각하여 5개의 문자를 나열하는 방법과 같다.

$$\therefore \frac{5!}{2!} = 60$$

13. 여섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 네 개의 숫자를 써서 네 자리의 정수를 만들 때, 짝수는 몇 개인가?

① 96

② 114

③ 128

④ 144

⑤ 156

해설

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{}0 :_5 P_3 = 60$$

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{}2 : 4 \times 4 \times 3 = 48$$

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{}4 : 4 \times 4 \times 3 = 48$$

$$\therefore 60 + 48 \times 2 = 156$$

14. 서울의 어떤 지역에서는 국번 4자리를 포함하여 8자리의 전화 번호를 사용하고 있다. 국번에 사용할 수 있는 숫자가 2, 4, 6, 8, 0일 때, 이 지역에서 사용할 수 있는 전화 번호는 몇 개인가? 단, 국번의 첫 번째 자리의 숫자는 0이 아니고, 숫자는 중복하여 사용한다.

① 4500000

② 4999999

③ 5000000

④ 6250000

⑤ 7000000

해설

국번을 먼저 생각하면 첫 번째 자리에 올수 있는 가지수는 4 가지이고

나머진 모두 5 가지 이다.

$$\therefore 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$$

뒤의 4 자리는 각각 10 가지씩 가능하다.

$$\therefore 500 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 5000000$$

15. 4개의 숫자 1, 2, 3, 4를 이용하여 만든 네 자리의 정수 중에서 2300보다 큰 수의 개수는?

① 12개

② 16개

③ 20개

④ 24개

⑤ 30개

해설

23□□의 개수 : 2개

24□□의 개수 : 2개

3□□□의 개수 : 6개

4□□□의 개수 : 6개

$$\therefore 2 + 2 + 6 + 6 = 16(\text{개})$$

16. 여섯 개의 수 3, 4, 5, 6, 7, 8 에서 서로 다른 두 수 p, q 를 택하여 이차방정식 $px^2 + qx = 0$ 을 만들 때, 만들 수 있는 집합 $A = \{x | px^2 + qx = 0\}$ 의 개수는?

① 22

② 23

③ 24

④ 25

⑤ 26

해설

6 개의 수 중에서 2 개를 택하여 p, q 에 나열하는 경우의 수를 생각한다.

$${}_6P_2 = 6 \times 5 = 30 \text{ 개.}$$

이 중에서 $p = 3, q = 6$ 인 경우와 $p = 4, q = 8$ 인 경우의 해는 같아진다.

따라서 이와 같은 경우를 찾으면,

$$p = 6, q = 3 \text{ 과 } p = 8, q = 4$$

$$p = 3, q = 4 \text{ 과 } p = 6, q = 8$$

$$p = 4, q = 3 \text{ 과 } p = 8, q = 6$$

이므로 구하고자 하는 경우의 수는

$$30 - 4 = 26(\text{개}) \text{ 이다.}$$

17. 등식 ${}_9P_5 = {}_9C_4 \times k!$ 을 만족하는 자연수 k 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$${}_9P_5 = {}_9C_5 \times 5! = {}_9C_4 \times 5!$$

$$\therefore k = 5$$

18. 10명의 주주 중에서 사장 1명, 부사장 2명을 뽑는 방법의 수는?

① 240

② 280

③ 360

④ 480

⑤ 720

해설

10명 중에서 사장 1명을 뽑는 가지수는 ${}_{10}C_1$,
나머지 9명 중에서 부사장 2명을 뽑는 가지수는 ${}_9C_2$
따라서 ${}_{10}C_1 \times {}_9C_2 = 360$

19. 123456 과 같이 자릿수가 낮을수록 각 자리의 숫자가 커지는 여섯 자리의 자연수의 개수는?

① 76

② 80

③ 84

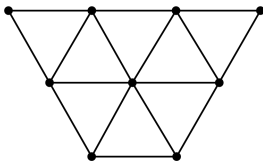
④ 86

⑤ 88

해설

1 ~ 9 까지의 숫자 중에서 6 개를 선택하여
자리수가 낮을수록 각 자리의 숫자가 커지도록
배열하면된다. ${}_9C_6 = 84$

20. 다음 그림과 같이 도형 위에 9 개의 점이 놓여 있다. 9 개의 점 중에서 서로 다른 세 점을 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는?



① 71

② 73

③ 75

④ 77

⑤ 79

해설

9 개의 점 중에서 세 점을 택하는 방법의 수는

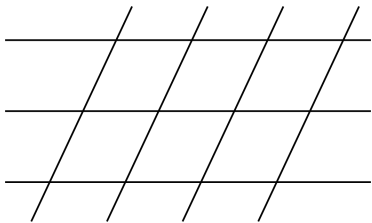
$${}_9C_3 = 84 \text{ (개)}$$

일직선 위에 있는 세 점을 택하는 방법의 수는

$${}_4C_3 + {}_3C_3 \times 5 = 9 \text{ (개)}$$

따라서 구하는 삼각형의 개수는 $84 - 9 = 75$ (개)

21. 다음 그림과 같이 3 개의 평행선과 4 개의 평행선이 만나고 있다.
이들로 이루어지는 평행사변형은 몇 개인가?



- ① 18 개 ② 24 개 ③ 28 개 ④ 32 개 ⑤ 36 개

해설

가로줄 중에서 2 개를 선택하고, 세로줄 중에서 2 개를 선택하면
평행사변형이 하나 정해진다.

$${}_3C_2 \times {}_4C_2 = 18$$

22. 11 명의 학생을 3 명, 3 명, 5 명의 3 개의 조로 나누어 과학실, 화장실, 식당을 청소하도록 하는 방법의 수는?

① 4620

② 6930

③ 13860

④ 27720

⑤ 55440

해설

$${}_{11}C_3 \times {}_8C_3 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 27720$$

23. 서로 다른 15 종류의 꽃이 있다. 5 개씩 세 사람에게 나누어 주는 방법은 몇 가지인가?

① ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5$

② ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{3!}$

③ ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times 3!$

④ ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{3!} \times 3!$

⑤ ${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5$

해설

5 개씩 3 뭉치로 나누고 다시 세 사람에게 나누어 주므로

$${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{3!} \times 3! = 756756 \text{ (가지)}$$

24. 서로 다른 네 개의 다리를 서로 다른 네 개의 건설 팀이 건설하는데 두 팀씩 2 개조로 나누어서 각 조가 2 개씩 나누어 맡아서 건설하기로 하였다. 건설하는 방법의 수는?

① 15

② 18

③ 21

④ 24

⑤ 27

해설

서로 다른 4 개의 다리를 2 개씩 나누는 가지수는

$${}_4C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$$

서로 다른 네 개의 건설 팀을 두 팀씩 2 개조로 나누는 가지수

$${}_4C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$$

2 개조가 나누어진 2 개동 중 하나를 선택하는 가지수는 2가지
따라서, 건설하는 방법의 수는

$$3 \times 3 \times 2 = 18 \text{ (가지) 이다.}$$

25. 가사 시간에 요리활동에 참가한 학생들이 각자 할 일을 분담하기로 하였다. 희준이가 속해 활동할 조는 모두 7 명인데, 2 명은 카레밥, 3 명은 된장국, 나머지 2 명은 계란부침을 만들기로 할 때, 할 일을 나누는 방법의 수는?

① 100

② 150

③ 210

④ 310

⑤ 450

해설

7 명 중 카레밥을 만들 2명을 택하는 방법은 ${}_7C_2$ (가지),
나머지 5 명 중에 된장국을 만들 3 명을 택하는 방법은 ${}_5C_3$ (가
지),

남은 나머지 2명은 계란부침을 만들면 되므로 ${}_2C_2$ (가지) 이다.
이때, 카레밥을 만드는 2명과 계란부침을 만드는 2명은 같은
수이지만 카레밥을 만드는 일과 계란부침을 만드는 일은 구별이
되므로 할 일을 나누는 방법의 수는

$${}_7C_2 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 = 210 \text{ (가지)}$$

26. 다음을 만족하는 집합 A 의 원소가 될 수 없는 것은?

㉠ 모든 원소는 자연수이다.

㉡ $2 \in A, 6 \in A$

㉢ $a + b \in A, a \in A, b \in A$

① 4

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$2 \in A, 6 \in A$ 이므로

$2 + 2 = 4 \in A, 2 + 6 = 8 \in A$

$4 + 6 = 10 \in A, 6 + 6 = 12 \in A$

27. 집합 $M = \{a + bi \mid a^2 + b^2 = 1, a, b \text{는 실수}\}$ 에 대하여 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ $z_1 \in M, z_2 \in M$ 이면 $z_1 + z_2 \in M$

㉡ $z_1 \in M, z_2 \in M$ 이면 $z_1 z_2 \in M$

㉢ $z_1 \in M, z_2 \in M$ 이면 $\frac{z_1}{z_2} \in M$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$z_1 = a + bi \in M, z_2 = c + di \in M$ 이라 하자.

㉠ $z_1 + z_2 = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$ 에서

$$(a + c)^2 + (b + d)^2$$

$$= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2$$

$$= 2 + 2(ac + bd) \text{ 이므로}$$

$2 + 2(ac + bd) \neq 1$ 일수 있으므로 $z_1 + z_2 \in M$ 이라 할 수 없다.

㉡ $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di)$

$$= ac + adi + bci - bd$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i \text{ 에서}$$

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

$$= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2$$

$$= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + b^2c^2$$

$$= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = a^2 + b^2 = 1 \quad (\because c^2 + d^2 = 1)$$

$$\therefore z_1 \cdot z_2 \in M$$

㉢ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di}$

$$= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$$

$$= \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2}$$

$$= (ac + bd) + (bc - ad)i$$

$$(\because c^2 + d^2 = 1) \text{ 에서}$$

$$(ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$$

$$= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2$$

$$= a^2c^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 = (a^2 + b^2)c^2 + (a^2 + b^2)d^2$$

$$= c^2 + d^2 = 1$$

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} \in M$$

28. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 약수}\}$,
 $C = \{x \mid x \text{는 } 64 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $A \subset B \subset C$ 가 동시에 성립하기
 위한 $\square$ 의 값을 모두 구하면?

① 4

② 8

③ 12

④ 16

⑤ 20

해설

$A = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ 집합 A 를 포함
 하면서 집합 C 에 포함되는 집합이 되려면 $\square$ 는 64의 약수 중
 8의 배수여야 한다. 따라서 $\square = 8, 16, 32, 64$

29. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 $A^c \cap B = \emptyset$ 를 만족할 때, 다음 중에서 항상 성립하는 것의 개수는?

㉠ $A = B$

㉡ $A \cup B = B$

㉢ $A^c \subset B^c$

㉤ $A \cap B = B$

㉥ $A \cup B^c = U$

㉦ $A - B = \emptyset$

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

$A^c \cap B = B - A = \emptyset$ 이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. $\therefore B \subset A$

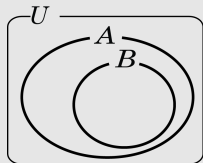
㉠ $A = B$ 는 $B \subset A, A \subset B$ 이므로 항상 성립하지 않는다.

㉢ $B \subset A \leftrightarrow A^c \subset B^c$

㉤ $B \subset A \leftrightarrow A \cap B = B$ 이므로 성립한다.

㉥ 위의 그림에서 $A \cup B^c = U$ 이다.

$\therefore$ 3개



30. 자연수로 이루어진 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $2(n-1)$ 과, $2n$ 을 포함하지 않은 부분집합의 개수가 32 일 때, n 의 값을 구하면?

① 10

② 14

③ 18

④ 22

⑤ 26

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로

$$2^{n-2} = 32 = 2^5 \text{ 이다.}$$

$$\therefore n - 2 = 5$$

$$\therefore n = 7$$

원소의 개수가 7 개이므로 $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, $n = 14$ 이다.

31. 집합 $A = \{2, 3 \times a, a + 3\}$, $B = \{a, 2 \times a + 1, 3 \times a - 2\}$ 이고 $A - B = \{6\}$ 일 때, $C = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 $(A - C) \cup (B \cap C)$ 는?

① $\{2, 4\}$

② $\{2, 5\}$

③ $\{2, 6\}$

④ $\{2, 5, 6\}$

⑤ $\{2, 6, 7\}$

해설

$A - B = \{6\}$ 이므로

(1) $3 \times a = 6$ 일 때, $a = 2$ 이다.

따라서 $A = \{2, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ 이고 $C = \{1, 2, 3\}$ 이므로

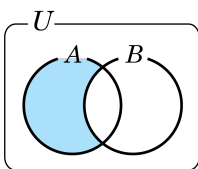
$(A - C) \cup (B \cap C) = \{5, 6\} \cup \{2\} = \{2, 5, 6\}$ 이다.

(2) $a + 3 = 6$ 일 때, $a = 3$ 이다.

따라서 $A = \{2, 6, 9\}$, $B = \{3, 7\}$ 이므로 $A - B = \{2, 6, 9\} \neq \{6\}$
이므로 조건에 맞지 않다.

따라서 (1), (2) 에서 $(A - C) \cup (B \cap C) = \{2, 5, 6\}$ 이다.

32. 다음 중 다음 벤 다이어그램의 색칠된 부분이 나타내는 집합에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면 ?



- ① $A - B$ 라고 쓰며, A 마이너스 B 라고 읽는다.
- ② A 에도 속하고 B 에도 속하는 원소들로 이루어진 집합이다.
- ③ $A - B = \{x | x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\}$
- ④ $A - B = B - A$
- ⑤ $A - B = A \cap B^c$

해설

- ① $A - B$ 라고 쓰며, A 차집합 B 라고 읽는다.
- ② A 에는 속하지만 B 에도 속하지 않는 원소들로 이루어진 집합이다
- ④ $A - B \neq B - A$

33. 두 집합 A, B 가 다음과 같을 때 $(A - B) \cup X = X$, $(A \cup B) \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

$$A = \{x | x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}, B = \{x | x \text{는 } 5 \text{이하의 홀수}\}$$

- ① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 10개

해설

$$(A - B) \cup X = X \text{ 이므로 } (A - B) \subset X$$

$$(A \cup B) \cap X = X \text{ 이므로 } X \subset (A \cup B),$$

$$A = \{1, 2, 4, 8\}, B = \{1, 3, 5\}$$

$$\{2, 4, 8\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$$

집합 X 는 집합 $A \cup B$ 의 부분집합 중 원소 2, 4, 8을 반드시 포함하는 집합이다.

$$\therefore 2^{6-3} = 2^3 = 8 \text{ (개)}$$

34. $U = \{x | 0 \leq x \leq 12, x \text{는 자연수}\}$ 의 두 부분 집합 $A = \{x | x \text{는 } 12 \text{ 이하의 } 4 \text{의 배수}\}$, $B = \{3, 4, 7, 8, 11\}$ 에 대하여 $n((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))$ 는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$A = \{4, 8, 12\}$, $B = \{3, 4, 7, 8, 11\}$ 이므로

$$\begin{aligned} n((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) &= n((A - B) \cup (B - A)) \\ &= n(\{3, 7, 11, 12\}) = 4 \end{aligned}$$

35. 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면 $P \cup Q = P$, $P \cap R = \emptyset$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $p \rightarrow \sim r$

② $\sim p \rightarrow \sim q$

③ $q \rightarrow r$

④ $q \rightarrow \sim r$

⑤ $r \rightarrow \sim p$

해설

$$P \cup Q = P \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow q \rightarrow p \Leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$$

$$P \cap R = \emptyset \Rightarrow p \rightarrow \sim r \Leftrightarrow r \rightarrow \sim p \quad q \rightarrow p, p \rightarrow \sim r \text{ 이므로 } q \rightarrow \sim r$$

36. 다음은 정수 a, b 에 대하여 명제 ‘ ab 가 짝수이면 a 또는 b 가 짝수이다.’ 를 증명한 것이다.

a, b 를 모두 홀수라 하면 $a = 2m - 1, b = 2n - 1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로

$$ab = (2m - 1)(2n - 1) = 4mn - 2m - 2n + 1$$

$$= 2(2mn - m - n) + 1$$

이때, $2mn - m - n$ 이 ’ 이므로, ab 는 이다.

따라서, ‘ a, b 가 홀수이면 ab 는 홀수이다.’ 는 참이고 이것은 주어진 명제의 이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 과정에서 빈칸에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

- ① 자연수, 홀수, 역 ② 정수, 짝수, 대우
 ③ 정수, 홀수, 대우 ④ 유리수, 짝수, 이
 ⑤ 유리수, 홀수, 이

해설

a, b 를 모두 홀수라 하면

$a = 2m - 1, b = 2n - 1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{aligned} ab &= (2m - 1)(2n - 1) = 4mn - 2m - 2n + 1 \\ &= 2(2mn - m - n) + 1 \end{aligned}$$

이때, $2mn - m - n$ 이 정수이므로 ab 는 홀수이다. 이것은 주어진 명제의 대우가 참임을 증명하여 주어진 명제가 참임을 증명한 것이다.

37. 다음 중 p 는 q 이기 위한 충분조건인 것은?

① $p : x = 1$ 이고 $y = 1$, $q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

② $p : |x - 1| = 2$, $q : x^2 - 2x + 3 = 0$

③ $p : a > 3$, $q : a^2 > 9$

④ $p : a^2 = ab$, $q : a = b$

⑤ $p : |a| < |b|$, $q : a < b$

해설

$p \rightarrow q$ 이면 (진리집합 P) $\subset$ (진리집합 Q)

① $P : x = 1, y = 1$, $Q : x = 1 \ y = 1 \Rightarrow$ 필요충분조건

② $P : x = 3$ 또는 $x = -1$, $Q : x = 1 \pm \sqrt{2}i \Rightarrow$ 서로소

③ $P : a > 3$, $Q : a < -3$ 또는 $a > 3 \Rightarrow$ 충분조건

④ $P : a = 0$ 또는 $a = b$, $Q : a = b \Rightarrow$ 필요조건

⑤ $p \not\rightarrow q, q \rightarrow p$ (반례 : $a = 2, b = -3$)

38. $x > 2$ 일 때, $2x - 3 + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 a , 그 때의 x 의 값을 b 라 할 때, $a + 2b$ 의 값을 구하면?

① $5 + \sqrt{2}$

② $5 + 2\sqrt{2}$

③ $5 + 3\sqrt{2}$

④ $5 + 4\sqrt{2}$

⑤ $5 + 6\sqrt{2}$

해설

산술평균, 기하평균의 관계에 따라

$$\begin{aligned} 2x - 3 + \frac{1}{x-2} &= 2(x-2) + \frac{1}{x-2} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{2} + 1$$

$$2(x-2) = \frac{1}{x-2} \text{ 에서}$$

$$2(x-2)^2 = 1, (x-2)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x > 2 \text{ 이므로 } b = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + 4 = 5 + 3\sqrt{2}$$

39. $x + y + z = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 을 만족하는 실수 x, y, z 에 대하여 x 가 취할 수 있는 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$x + y + z = 4 \text{에서 } y + z = 4 - x \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \text{에서 } y^2 + z^2 = 6 - x^2 \cdots \textcircled{㉡}$$

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 1^2)(y^2 + z^2) \geq (y + z)^2$$

(단, 등호는 $y = z$ 일 때 성립)

①, ②을 대입하면

$$2(6 - x^2) \geq (4 - x)^2, 3x^2 - 8x + 4 \leq 0$$

$$(3x - 2)(x - 2) \leq 0 \quad \therefore \frac{2}{3} \leq x \leq 2$$

$$\text{따라서 } M = 2, m = \frac{2}{3} \text{이므로 } \frac{M}{m} = 3$$

40. 두 함수 $f(x) = 4x+1$, $g(x) = 2x+3$ 에 대하여 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-2)$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$

② $-\frac{1}{3}$

③ $-\frac{1}{4}$

④ $-\frac{1}{5}$

⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

두 함수 $f(x) = 4x + 1$, $g(x) = 2x + 3$ 에 대하여

$$\begin{aligned}g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g &= g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ g \\&= (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} \circ g \\&= f^{-1} \circ g\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-2) &= (f^{-1} \circ g)(-2) \\&= f^{-1}(g(-2)) \\&= f^{-1}(-1)\end{aligned}$$

$f^{-1}(-1) = a$ 라고 하면 $f(a) = -1$ 이므로

$$4a + 1 = -1$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-2) = -\frac{1}{2}$$

41. $f\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = 3x-1$ 을 만족하는 $f(x)$ 에 대하여, $f^{-1}(11)$ 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$$f^{-1}(3x-1) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \text{ 이므로}$$

$$3x-1 = 11 \text{ 에서 } x = 4$$

$$\begin{aligned}\therefore f^{-1}(11) &= \frac{1+\sqrt{4}}{1-\sqrt{4}} \\ &= -3\end{aligned}$$

42. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ($x \geq 0$) 의 역함수를 $g(x)$ 라 할때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① 2

② $2\sqrt{2}$

③ 3

④ $2\sqrt{3}$

⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x \geq 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{2}x^2 = x \text{ 에서 } x^2 - 2x = 0, x(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 두 교점의 좌표가 $(0, 0)$, $(2, 2)$ 이므로
두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

43. 다항함수 $f(x) = \frac{x-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{x-b}{(b-c)(b-a)} + \frac{x-c}{(c-a)(c-b)}$ 일 때, $f(2013)$ 의 값은?

① $a + b + c$

② $a^2 + b^2 + c^2$

③ $a^3 + b^3 + c^3$

④ $ab + bc + ca$

⑤ 0

해설

주어진 식을 통분하면

(분자)

$$= \{(x-a)(b-c) + (x-b)(c-a) + (x-c)(a-b)\}$$

$$= (b-c + c-a + a-b)x$$

$$+ (-ab + ac - bc + ab - ca + cb) = 0$$

$$\therefore f(x) = 0 \quad \therefore f(2013) = 0$$

해설

주어진 식의 분모는 0이 아니므로

a, b, c 는 서로 다른 수이고

$$f(a) = \frac{a-b}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-c}{(c-a)(c-b)}$$

$$= \frac{-1}{b-c} + \frac{1}{b-c} = 0$$

$$f(b) = \frac{b-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b-c}{(c-a)(c-b)}$$

$$= \frac{-1}{a-c} + \frac{1}{a-c} = 0$$

그런데 $f(x)$ 는 일차이하의 함수이고

$$f(a) = f(b) = 0 \text{이므로}$$

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = 0$ 이다.

$$\therefore f(2013) = 0$$

44. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}}$ 의 값은?

① $\frac{6-\sqrt{6}}{6}$

② $\frac{\sqrt{5}-1}{12}$

③ $\frac{10-\sqrt{2}}{20}$

④ $\frac{16-\sqrt{5}}{30}$

⑤ $\frac{\sqrt{30}-1}{2}$

해설

$\sqrt{2} = \sqrt{1} \times \sqrt{2}$, $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$, ..., $\sqrt{30} = \sqrt{5} \times \sqrt{6}$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}} \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4} \times \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{5} \times \sqrt{4}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) \\ & \quad + \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}} = \frac{6-\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

45. A, B, C 세 사람이 두 명씩조를 짜서 x m를 달리는 시합을 하였다. A는 B를 20m차이로 이겼고, B는 C를 10m, A는 C를 28m차이로 각각 이겼다. 세 사람의 속도가 일정하다면 세 사람이 시합을 한 거리 x m는 얼마인가?

① 80 m

② 100 m

③ 120 m

④ 140 m

⑤ 160 m

해설

A, B, C의 속도를 각각, a , b , c 라 하면

$$\frac{x}{a} = \frac{x-20}{b} \dots ①$$

$$\frac{x}{b} = \frac{x-10}{c} \dots ②$$

$$\frac{x}{a} = \frac{x-28}{c} \dots ③$$

$$①, ③에서 \frac{x-20}{b} = \frac{x-28}{c} \dots ④$$

$$②, ④에서 \frac{x}{x-20} = \frac{x-10}{x-28}$$

$$\therefore x(x-28) = (x-10)(x-20) \text{에서}$$

$$x^2 - 28x = x^2 - 30x + 200$$

$$\therefore 2x = 200 \text{에서 } x = 100$$

46. $a + \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 일 때, a^5 의 값은?

① $-\sqrt{5}$

② -2

③ -1

④ 1

⑤ $\sqrt{5}$

해설

$$a^2 + 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

$$\therefore a^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a - 1$$

$$a^5 = a^4 \cdot a = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a - 1 \right)^2 \cdot a$$

$$= \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2}a^2 - (\sqrt{5}-1)a + 1 \right\} \cdot a$$

$$= \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a - 1 \right) - (\sqrt{5}-1)a + 1 \right\} \cdot a$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - a \right) \cdot a$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}a - a^2$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}a - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a - 1 \right) = 1$$

47. 자연수 x, y, z 에 대하여 $\sqrt{17+x\sqrt{2}} = y+z\sqrt{2}$ 가 성립할 때, $x+y+z$ 의 값을 구하면?

① 17

② 18

③ 19

④ 20

⑤ 21

해설

$\sqrt{17+x\sqrt{2}} = y+z\sqrt{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$17+x\sqrt{2} = y^2 + 2z^2 + 2yz\sqrt{2}$$

$$\therefore y^2 + 2z^2 = 17 \cdots \textcircled{㉠}, x = 2yz \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 $z = 1$ 이면 $y = \sqrt{15}$ 이므로 자연수가 아니다.

$$z = 2 \text{이면 } y^2 = 9 \quad \therefore y = 3$$

$$z = 3 \text{이면 } y^2 = -1 < 0 \text{ 이므로 모순}$$

$$\therefore x = 12, y = 3, z = 2$$

$$\therefore x + y + z = 17$$

48. $f(x)$ 는 유리수를 계수로 하는 x 의 다항식이고, $f(x) = x^2 + ax + b$,
 $f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$ 일 때, $a - b$ 의 값은?

① -5

② -4

③ -3

④ 0

⑤ 3

해설

$$\sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{4+3+2\sqrt{4 \times 3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\therefore f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = f(2 + \sqrt{3})$$

$$= (2 + \sqrt{3})^2 + a(2 + \sqrt{3}) + b$$

$$= (7 + 2a + b) + (4 + a)\sqrt{3} = 0$$

그런데, $7 + 2a + b$, $4 + a$ 는 유리수이므로 무리수의 상등에 관한 정리에서

$$7 + 2a + b = 0, 4 + a = 0 \quad \therefore a = -4, b = 1$$

$$\therefore a - b = -4 - 1 = -5$$

해설

$f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$ 이므로 $\sqrt{7+2\sqrt{12}} = 2 + \sqrt{3}$ 은 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이고, a, b 가 유리수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

두 근의 합 $4 = -a$, 두 근의 곱 $1 = b$

$$\therefore a - b = -4 - 1 = -5$$

49. 어느 회사에서 사원 연수를 위하여 네 지역 서울, 부산, 광주, 대구에서 각각 3 명씩 모두 12 명의 사원을 선발하였다. 같은 지역에서 선발된 사원끼리는 같은 조에 속하지 않도록 각 지역에서 한 명씩 선택하여 4 명으로 구성된 3 개의 조로 나누는 방법의 수는?

① 80

② 144

③ 216

④ 240

⑤ 288

해설

어느 한 지역의 세 사람을 각 1 명씩으로 하는 세 조를 생각하자.
나머지 세 지역의 사람들을 세 조에 배정하면 되므로

$$3! \times 3! \times 3! = 6^3 = 216$$

50. 십이각형의 서로 다른 대각선의 교점은 최대 몇 개인가?

① 125

② 175

③ 275

④ 385

⑤ 495

해설

십이각형에서 4개의 점을 선택하면 대각선이 한 개가 만들어진다. 따라서 대각선의 교점의 최댓값은 십이각형의 12개의 꼭지점에서 4개의 점을 선택하는 가지 수와 같다.

$$\therefore {}_{12}C_4 = 495$$