1. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은 무엇인가?

① $a > 0$ 일 때, $\sqrt{9a^2} = 3a$

② $a < 0$ 일 때, $-\sqrt{4a^2} = 2a$

③ $a < 0$ 일 때, $-\sqrt{(-5a)^2} = -5a$

④ $a > 0$ 일 때, $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$

⑤ $a > 0$ 일 때, $-\sqrt{25a^2} = -5a$

해설

③ $a < 0$ 일 때,
$-\sqrt{(-5a)^2} = -\sqrt{25a^2} = -|5a| = 5a$

2. $a > 0$, $b < 0$ 일 때, $\sqrt{a^2} + \sqrt{(-b)^2} - \sqrt{4a^2} - \sqrt{b^2}$ 을 간단히 하면?

① $-a-b$　② $-a-2b$　③ a

④ $-a$　⑤ $-a+2b$

해설

$a > 0$이므로 $2a > 0$,
$b < 0$이므로 $-b > 0, b < 0$
$(\sqrt{a})^2 + \sqrt{(-b)^2} - \sqrt{(2a)^2} - \sqrt{b^2}$
$= a + (-b) - (2a) - (-b)$
$= a - b - 2a + b = -a$

3. $0 < a < 1$ 일 때, $\sqrt{a^2} + \sqrt{(a-1)^2}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$a > 0$ 이므로 $\sqrt{a^2} = a$,
$a < 1$ 이므로 $\sqrt{(a-1)^2} = -(a-1) = 1 - a$
따라서 $\sqrt{a^2} + \sqrt{(a-1)^2} = a + 1 - a = 1$ 이다.

4. 다음 수를 큰 순서대로 바르게 나열한 것은?

보기

$\sqrt{(-3)^2}$, -3 , $-\sqrt{3}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

① $-3 > -\sqrt{3} > -\frac{1}{\sqrt{3}} > -\frac{1}{3} > \sqrt{(-3)^2}$

② $-3 > -\frac{1}{3} > -\frac{1}{\sqrt{3}} > -\sqrt{3} > \sqrt{(-3)^2}$

③ $\sqrt{(-3)^2} > -\frac{1}{3} > -\frac{1}{\sqrt{3}} > -\sqrt{3} > -3$

④ $\sqrt{(-3)^2} > -3 > -\sqrt{3} > -\frac{1}{3} > -\frac{1}{\sqrt{3}}$

⑤ $-\frac{1}{3} > \sqrt{(-3)^2} > -\sqrt{3} > -3 > -\frac{1}{\sqrt{3}}$

해설

음수는 음수끼리 비교한다.
부호를 제외하고 제곱을 하면

$-3^2 = -9$, $-\left(\sqrt{3}\right)^2 = -3$

$-\frac{1}{3}^2 = -\frac{1}{9}$, $-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = -\frac{1}{3}$ 이다.

$\therefore\ -\frac{1}{3} > -\frac{1}{\sqrt{3}} > -\sqrt{3} > -3$

$\therefore\ \sqrt{(-3)^2} > -\frac{1}{3} > -\frac{1}{\sqrt{3}} > -\sqrt{3} > -3$

5. $\dfrac{3\sqrt{a-4}}{\sqrt{18}} = 3$ 일 때, a 의 값은?

① 24 ② 22 ③ 20 ④ 18 ⑤ 16

해설

$\dfrac{3\sqrt{a-4}}{\sqrt{18}} = \dfrac{3\sqrt{a-4}\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{a-4}\times\sqrt{2}}{2} = 3$

$\sqrt{a-4}\times\sqrt{2} = 6 = \sqrt{36}$

$(a-4)\times 2 = 36$

$a - 4 = 18$

$\therefore a = 22$

6. $\sqrt{108} - \sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{24}$ 를 $a\sqrt{3} + b\sqrt{6}$ 의 꼴로 고칠 때, $a - b$ 의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

$\sqrt{108} - \sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{24}$
$= 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$
$= -\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$
$\therefore\ a - b = -1 - 2 = -3$

7. 다음 중 $\sqrt{60}$ 의 값과 숫자 배열이 같은 것을 모두 고르면?

① $\sqrt{0.6}$　　② $\sqrt{600}$　　③ $\sqrt{6000}$

④ $\sqrt{60000}$　　⑤ $\sqrt{0.0006}$

해설

$\sqrt{60}$ 이 들어가는 형태로 표현할 수 있으면 $\sqrt{60}$ 과 숫자 배열이 같은 수이다.

① $\sqrt{0.6} = \sqrt{\frac{6}{10}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{60}}{10}$

② $\sqrt{600} = 10\sqrt{6}$

③ $\sqrt{6000} = 10\sqrt{60}$

④ $\sqrt{60000} = 100\sqrt{6}$

⑤ $\sqrt{0.0006} = \sqrt{\frac{6}{10000}} = \frac{\sqrt{6}}{100}$

②, ④, ⑤는 $\sqrt{6}$ 과 숫자 배열이 같은 수

8. $x^2 + 4(a+b)x + 3a^2 + 6ab + 3b^2$ 을 인수분해하면?

① $(x+a+b)(x-a-b)$　② $(x+a+b)(x+2a+2b)$
③ $(x+a+b)(x+2a+3b)$　④ $(x+a+b)(x+3a+2b)$
⑤ $(x+a+b)(x+3a+3b)$

해설

$x^2 + 4(a+b)x + 3a^2 + 6ab + 3b^2$
$= x^2 + 4(a+b)x + 3(a+b)^2$
$= (x+a+b)(x+3a+3b)$

9. 이차방정식 $x^2-(a+2)x+3a+2=0$의 한 근이 $x=2$일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2-(a+2)x+3a+2=0$에 $x=2$를 대입하면,
$2^2-(a+2)\times2+3a+2=0$
$4-2a-4+3a+2=0$
$\therefore\ a=-2$

10. 이차방정식 $x^2 - x - 6 = 0$ 의 두 근의 합이 $3x^2 - 5x + a = 0$ 의 근일 때, 다른 한 근은?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$x^2 - x - 6 = 0$, $(x-3)(x+2) = 0$

$\therefore$ $x = 3$ 또는 $x = -2$

두 근의 합은 1 이다.

$3x^2 - 5x + a = 0$ 에 $x = 1$ 을 대입하면

$3 - 5 + a = 0$ $\quad \therefore$ $a = 2$

$3x^2 - 5x + 2 = 0$, $(x-1)(3x-2) = 0$

$\therefore$ $x = 1$ 또는 $x = \frac{2}{3}$

11. 이차방정식 $x^2+(k-1)x+\frac{9}{16}=0$ 이 중근을 가질 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=\frac{5}{2}$

해설

$x^2+(k-1)x+\frac{9}{16}=0$

i) $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=0,\ x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=0$

$-\frac{3}{2}=k-1,\ k=-\frac{1}{2}$

ii) $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=0,\ x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=0$

$\frac{3}{2}=k-1,\ k=\frac{5}{2}$

(i), (ii) 에 의하여 k 는 양수이므로 $k=\frac{5}{2}$ 이다.

12. 다음 중 이차방정식과 그 근이 알맞게 짝지어진 것은?

① $2 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\frac{2}{3}$

② $2(x-3)^2 = 6 \rightarrow x = 3 \pm \sqrt{3}$

③ $3(x-1)(x-3) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$ 또는 $x = 1$

④ $x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow x = -5$ 또는 $x = 3$

⑤ $3(x-1)^2 = 12 \rightarrow x = -3$ 또는 $x = 1$

해설

① $3x^2 = 2, x^2 = \frac{2}{3}, x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

③ $3(x-1)(x-3) = 0, x = 1$ 또는 $x = 3$

④ $x^2 - 2x = 15, (x-1)^2 = 16, x - 1 = \pm 4, x = 5$ 또는 $x = -3$

⑤ $3(x-1)^2 = 12, (x-1)^2 = 4, x - 1 = \pm 2, x = 3$ 또는 $x = -1$

13. 다음 보기에서 옳은 것의 개수는?

보기

㉠ $\frac{\pi}{4}$는 유리수가 아니다.

㉡ 모든 무한소수는 무리수이다.

㉢ $1-\sqrt{7}$, $\sqrt{121}$, $-\sqrt{15^2}$, π는 모두 무리수이다.

㉣ 무리수이면서 유리수인 수는 없다.

㉤ 음이 아닌 수의 제곱근은 반드시 2개가 있고, 그 절댓값은 같다.

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

㉡ 순환소수는 유리수이다.
㉢ $\sqrt{121}$, $-\sqrt{15^2}$는 유리수이다.
㉤ 0의 제곱근은 0의 1개 뿐이다.

14. $x^2 = 4$, $y^2 = 9$ 이고 $x - y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

$x = \pm 2,\ y = \pm 3$

$x - y = -1,\ 5,\ -5,\ 1$

$\therefore M - m = 5 - (-5) = 10$

15. $\sqrt{90-x}-\sqrt{7+x}$ 의 값이 가장 큰 자연수가 되도록 하는 자연수 x 의 값은?

① 5　　② 9　　③ 15　　④ 26　　⑤ 30

해설

$\sqrt{90-x}$, $\sqrt{7+x}$ 둘 다 자연수가 되어야 한다. $\sqrt{90-x}$ 가 최대 $\sqrt{7+x}$ 가 최소가 되려면 $x=9$ 이어야 한다.

16. $\sqrt{18}+3$과 $\sqrt{15}-2$ 중 큰 수를 a, $2\sqrt{7}$과 $3\sqrt{2}-1$ 중 작은 수를 b라고 할 때, $b-a$ 의 값을 구하면?

① 4　② 2　③ 0　④ -2　⑤ -4

해설

① $\sqrt{18}+3-(\sqrt{15}-2)=\sqrt{18}+3-\sqrt{15}+2>0$
$\therefore \sqrt{18}+3>\sqrt{15}-2$
② $2\sqrt{7}-(3\sqrt{2}-1)=2\sqrt{7}-3\sqrt{2}+1=\sqrt{28}-\sqrt{18}+1>0$
$\therefore 2\sqrt{7}>3\sqrt{2}-1$
$\therefore a=\sqrt{18}+3=3\sqrt{2}+3, b=3\sqrt{2}-1$
$b-a=3\sqrt{2}-1-(3\sqrt{2}+3)=-4$ 이다.

17. $x,\ y > 0$ 이고, $\sqrt{\frac{6}{x}} \times \sqrt{3x^2} \times \sqrt{18x} = 90$, $y = x + 2$ 일 때, $3\sqrt{7} \times \frac{1}{\sqrt{y}} \times \sqrt{y-3}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$\sqrt{\frac{6}{x}} \times \sqrt{3x^2} \times \sqrt{18x} = 90$

$\sqrt{\frac{6}{x} \times 3x^2 \times 18x} = 90$

$\sqrt{18^2 \times x^2} = 90$

$18x = 90$

$\therefore x = 5$

$y = x + 2$ 이므로 $\therefore y = 7$

$\therefore 3\sqrt{7} \times \frac{1}{\sqrt{y}} \times \sqrt{y-3} = 3\sqrt{7} \times \frac{1}{\sqrt{7}} \times \sqrt{4}$

$= 3 \times 2 = 6$ 이다.

18. 다음을 만족하는 유리수 a, b, c에 대하여 $\sqrt{\dfrac{2ab}{c}}$ 의 값은?

$$\frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{a},\ \ \sqrt{135} = 3\sqrt{b},\ \ \sqrt{2000} = c\sqrt{5}$$

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$\frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 8} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2} = \sqrt{a}$

$\therefore a = 2$

$\sqrt{135} = \sqrt{3^3 \times 5} = 3\sqrt{15} = 3\sqrt{b}$

$\therefore b = 15$

$\sqrt{2000} = \sqrt{20^2 \times 5} = 20\sqrt{5} = c\sqrt{5}$

$\therefore c = 20$

$\therefore \sqrt{\frac{2ab}{c}} = \sqrt{\frac{2 \times 2 \times 15}{20}} = \sqrt{3}$

19. $\sqrt{0.96}$ 은 $\sqrt{6}$ 의 x 배이다. 이 때, x 의 값은?

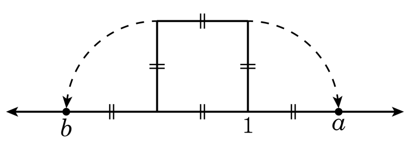
① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{16}{5}$

해설

$\sqrt{0.96} = \sqrt{\frac{96}{100}} = \sqrt{\frac{4^2 \times 6}{10^2}} = \frac{4}{10}\sqrt{6} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$

$\therefore\ x = \frac{2}{5}$

20. 다음 그림의 사각형은 넓이가 2 인 정사각형이다. $\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$ 의 값은?



① $\sqrt{2}-2$ ② $\sqrt{2}-1$ ③ $\sqrt{2}$

④ $2-\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

넓이가 2 인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$

$a=1+\sqrt{2}$, $b=1-2\sqrt{2}$

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}+1-2\sqrt{2})$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$$

21. 세 실수 $A = \sqrt{20} + \sqrt{80}$, $B = \sqrt{21} + \sqrt{79}$, $C = \sqrt{22} + \sqrt{78}$ 의 대소 관계가 바르게 된 것은?

① $A < B < C$　② $A < C < B$　③ $B < A < C$

④ $C < A < B$　⑤ $C < B < A$

해설

A, B, C 가 모두 양수이므로 A^2, B^2, C^2 을 구해서 비교해도 좋다.

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\sqrt{20} + \sqrt{80}\right)^2 \\ &= 20 + 2\sqrt{20 \times 80} + 80 = 100 + 2\sqrt{1600} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^2 &= (\sqrt{21} + \sqrt{79})^2 \\ &= 21 + 2\sqrt{21 \times 79} + 79 = 100 + 2\sqrt{1659} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^2 &= (\sqrt{22} + \sqrt{78})^2 \\ &= 22 + 2\sqrt{22 \times 78} + 78 = 100 + 2\sqrt{1716} \end{aligned}$$

$\sqrt{1600} < \sqrt{1659} < \sqrt{1716}$ 이므로 $A^2 < B^2 < C^2$

$\therefore A < B < C$

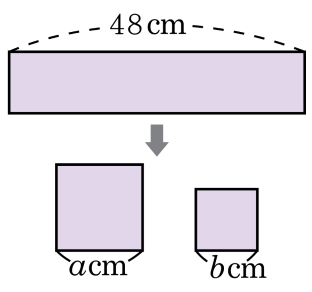
22. $Ax^2+36x+B=(2x+C)^2$ 에서 양수 $A,\ B,\ C$ 의 합을 구하면?

① 4 ② 9 ③ 81 ④ 90 ⑤ 94

해설

$Ax^2+36x+B=4x^2+2\times 2Cx+C^2$ 이므로 $A=4,\ B=81,\ C=9$ 이다.
따라서 $A+B+C=4+81+9=94$ 이다.

23. 다음 그림과 같이 48 cm 인 끈을 적당히 두 개로 잘라 한 변의 길이가 각각 a cm 와 b cm 인 정사각형 두 개를 만들었다. 이 때, 두 정사각형의 넓이의 합이 74 cm^2 일 때, 넓이의 차를 구하여라. (단, $a > b > 0$)



▶ 답 : ____ cm^2

▷ 정답 : 24 cm^2

해설

$4a + 4b = 48$ 이므로 $a + b = 12$

또, $a^2 + b^2 = 74$

$(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$

$74 = 144 - 2ab$

$ab = 35$

$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 144 - 140 = 4$

$a - b > 0,\ a - b = 2$

$\therefore a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 12 \times 2 = 24(\text{cm}^2)$

24. x^4-13x^2+36 을 인수분해했을 때, 일차식으로 이루어진 인수들의 합을 구하면?

① $4x+13$ ② $4x$ ③ $4x-13$
④ $2x^2-13$ ⑤ $2x^2+5$

해설

$x^4-13x^2+36=(x^2-9)(x^2-4)$
$=(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)$
$\therefore$ (일차식 인수들의 합)
$=x+3+x-3+x+2+x-2=4x$

25. 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a+b+c$ 의 값은?

$$\frac{ax^2-3x-b}{4x^2+cx-5}=2$$

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ $\frac{33}{2}$

해설

$\frac{ax^2-3x-b}{4x^2+cx-5}=2$를 정리하면,

$(a-8)x^2+(-3-2c)x-b+10=0$

이 식이 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 성립하므로 x 에 대한 항등식이다.

따라서 $a-8=0,\ -3-2c=0,\ -b+10=0$

$\therefore\ a=8,\ b=10,\ c=-\frac{3}{2}$

$a+b+c=\frac{33}{2}$ 이다.

26. 이차방정식 $3x^2 - x + 2 = 0$ 의 한 근을 A, 이차방정식 $x^2 - 3x - 6 = 0$ 의 한 근을 B 라 할 때, $3A^2 + B^2 - A - 3B$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$3A^2 - A + 2 = 0$, $B^2 - 3B - 6 = 0$이므로
$3A^2 - A = -2$, $B^2 - 3B = 6$
$\therefore\ 3A^2 + B^2 - A - 3B$
$= 3A^2 - A + B^2 - 3B$
$= -2 + 6 = 4$

27. x 에 대한 이차방정식 $(m-1)x^2-(m^2+2m-2)x+21=0$ 의 한 근이 3 일 때, 두 근을 모두 양수가 되게 하는 m 의 값과 나머지 한 근의 합을 구하면?

① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{17}{2}$ ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ $\frac{21}{2}$

해설

한 근이 3 이므로 $x=3$ 을 대입하면

$9(m-1)-3(m^2+2m-2)+21=0$

$m^2-m-6=0,\ (m-3)(m+2)=0$

$\therefore\ m=3$ 또는 $m=-2$

i) $m=-2$ 이면 $-3x^2+2x+21=0$

$3x^2-2x-21=0,\ (3x+7)(x-3)=0$

$x=-\frac{7}{3}$ 또는 $x=3$ (한 근이 음수이므로 부적합)

ii) $m=3$ 이면 $2x^2-13x+21=0$

$(x-3)(2x-7)=0$

$x=3$ 또는 $x=\frac{7}{2}$ (두 근이 모두 양수이므로 적합)

따라서 $m=3$, 나머지 한 근은 $x=\frac{7}{2}$

$\therefore\ m+x=3+\frac{7}{2}=\frac{13}{2}$

28. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$ 의 근에 대한 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $k=-6$ 이면 근이 2 개이다.

② $k=-1$ 이면 정수인 근을 갖는다.

③ $k=0$ 이면 무리수인 근을 갖는다.

④ $k=2$ 이면 근이 1 개이다.

⑤ $k=4$ 이면 근이 없다.

해설

$(x-1)^2 = 3-k,\ x-1 = \pm\sqrt{3-k}$
$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{3-k}$
음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.
$3 > k$: 근이 0 개
$k = 3$: 근이 1 개
$3 < k$: 근이 2 개

29. 5의 음의 제곱근을 a , 2의 양의 제곱근을 b 라 할 때, $\sqrt{-a^2+3b^2}-\sqrt{(a^2\times b^2)^2}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$a=-\sqrt{5}$, $b=\sqrt{2}$

$\sqrt{-a^2+3b^2}-\sqrt{(a^2\times b^2)^2}$

$=\sqrt{-\left(-\sqrt{5}\right)^2+3\left(\sqrt{2}\right)^2}$

$-\sqrt{\left\{\left(-\sqrt{5}\right)^2\times\left(\sqrt{2}\right)^2\right\}^2}$

$=\sqrt{-5+6}-\sqrt{(5\times 2)^2}$

$=1-10=-9$

30. 부등식 $\frac{1}{3} \le \frac{1}{\sqrt{2x}} < \frac{1}{2}$ 을 만족하는 자연수 x 를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 4

해설

$\frac{1}{3} \le \frac{1}{\sqrt{2x}} < \frac{1}{2}$ 이므로

$2 < \sqrt{2x} \le 3$

각 변을 제곱하면

$4 < 2x \le 9$

$2 < x \le \frac{9}{2}$

따라서 주어진 조건을 만족하는 자연수는 3, 4 이다.

31. 두 정육면체 A, B의 한 면의 대각선의 길이의 비가 $2:3$이고 두 정육면체의 부피의 합이 $35\,\mathrm{cm}^3$ 이다. A, B의 한 모서리의 길이를 각각 $a\,\mathrm{cm}, b\,\mathrm{cm}$라 할 때 $b-a$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $b-a=1$

해설

A, B의 한 모서리의 길이를 각각 $a\,\mathrm{cm}, b\,\mathrm{cm}$라 할 때
A, B의 대각선의 길이의 비는 $a\sqrt{2} : b\sqrt{2} = 2:3$ 이므로 $2b\sqrt{2} = 3a\sqrt{2}$

b에 대해 정리하면 $b = \frac{3}{2}a$ $(\because a>0, b>0)$

A, B의 부피의 합은

$a^3+b^3=35,\ a^3+\left(\frac{3}{2}a\right)^3=35, a^3=8$

$\therefore a=2, b=3$
따라서 $b-a=1$이다.

32. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ 이고, $S(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(x)$ 이라고 한다. 100 이하의 자연수 n에 대하여 $S(n)$의 값이 자연수가 되는 n을 모두 고르면?

① 8 ② 15 ③ 35 ④ 50 ⑤ 99

해설

$S(n) = \left(\sqrt{2}-1\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right) + \dots + \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sqrt{n+1}-1$

① $n = 8$일 때, $S(n) = 3 - 1 = 2$

② $n = 15$일 때, $S(n) = 4 - 1 = 3$

③ $n = 35$일 때, $S(n) = 6 - 1 = 5$

④ $n = 50$일 때, $S(n) = \sqrt{51} - 1$

⑤ $n = 99$일 때, $S(n) = 10 - 1 = 9$

따라서 ①, ②, ③, ⑤가 답이다.

33. 가로, 세로, 높이의 길이가 각각 $x,\ y,\ z$인 직육면체에 대하여 $x : y : z = (\sqrt{2}+2\sqrt{3}) : (2\sqrt{3}-\sqrt{5}) : (\sqrt{5}-\sqrt{2})$이고 모서리의 길이의 합이 $4\sqrt{27}$일 때, $xy+yz$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $xy+yz=\dfrac{63}{16}$

해설

$x : y : z = (\sqrt{2}+2\sqrt{3}) : (2\sqrt{3}-\sqrt{5}) : (\sqrt{5}-\sqrt{2})$ 이므로

$\dfrac{x}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\dfrac{y}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\dfrac{z}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=k$라 하면

$x=(\sqrt{2}+2\sqrt{3})k$

$y=(2\sqrt{3}-\sqrt{5})k$

$z=(\sqrt{5}-\sqrt{2})k$

(단, $k>0$)

직육면체의 모서리의 합이 $4\sqrt{27}$ 이므로

$4(x+y+z)=4\sqrt{27}$, $x+y+z=\sqrt{27}$

$(\sqrt{2}+2\sqrt{3})k+(2\sqrt{3}-\sqrt{5})k+(\sqrt{5}-\sqrt{2})k=\sqrt{27}$

$4\sqrt{3}k=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ $\therefore\ k=\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ xy+yz=\dfrac{3}{4}(\sqrt{2}+2\sqrt{3})\times\dfrac{3}{4}(2\sqrt{3}-\sqrt{5})+\dfrac{3}{4}(2\sqrt{3}-\sqrt{5})\times\dfrac{3}{4}(\sqrt{5}-\sqrt{2})=\dfrac{63}{16}$

34. $f(a) = \sqrt{a+1} + \sqrt{a}$일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \cdots + \frac{1}{f(80)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(a)} &= \frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}} \\ &= \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})} \\ &= \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{a+1-a} \\ &= \sqrt{a+1}-\sqrt{a}\end{aligned}$$ 이므로

(준식) $= (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{81}-\sqrt{80})$

$= \sqrt{81}-\sqrt{1} = 9-1 = 8$

35. $[a]$ 는 a 를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다. 예를 들면 $[3]=3$, $[3.4]=3$ 이다.

$a=2+\sqrt{3}$ 일 때, $\frac{[a]+1}{a}+\frac{2a}{[a]-a}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3-7\sqrt{3}$

해설

$[2+\sqrt{3}]=3$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{3+1}{2+\sqrt{3}}+\frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{3-\left(2+\sqrt{3}\right)}\\ &= \frac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{4-3}+\frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}{1-3}\\ &= 8-4\sqrt{3}-\left(2+3\sqrt{3}+3\right)\\ &= 3-7\sqrt{3}\end{aligned}$$

36. 0 부터 9 까지의 숫자가 적힌 카드 10 장이 있다. 이 중 2 장을 택해 카드에 적힌 숫자를 x, y 라고 할 때, $\sqrt{xy+x-3y-3}$ 가 자연수가 되는 경우의 수는 모두 몇 가지인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 11 가지

해설

$\sqrt{xy+x-3y-3} = \sqrt{(x-3)(y+1)}$ 이므로
$(x-3)(y+1)$ 이 완전제곱수일 때, 주어진 식이 자연수가 된다.
$(x-3)(y+1)=1$ 일 때, $(x,\ y)=(4,\ 0)$
$(x-3)(y+1)=4$ 일 때,
$(x,\ y)=(4,\ 3)(5,\ 1)(7,\ 0)$
$(x-3)(y+1)=9$ 일 때, $(x,\ y)=(4,\ 8)(6,\ 2)$
$(x-3)(y+1)=16$ 일 때, $(x,\ y)=(5,\ 7)(7,\ 3)$
$(x-3)(y+1)=25$ 일 때, $(x,\ y)=(8,\ 4)$
$(x-3)(y+1)=36$ 일 때, $(x,\ y)=(7,\ 8)(9,\ 5)$
따라서 $\sqrt{xy+x-3y-3}$ 가 자연수가 되는 경우의 수는 모두 11 가지이다.

37. 다항식 $a^2x+1-x-a^2$ 을 인수분해하였을 때, 다음 <보기> 중 그 인수가 될 수 있는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $x+1$　　㉡ $a+1$

㉢ x^2+1　　㉣ $a-1$

① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉢　　③ ㉡, ㉣

④ ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

(준식) $= a^2x-a^2-x+1$

$= a^2(x-1)-(x-1)$

$= (a^2-1)(x-1)$

$= (a+1)(a-1)(x-1)$

38. 다음을 계산하여라.

$$20^2 - 21^2 + 22^2 - 23^2 + 24^2 - 25^2$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -135

해설

$20^2 - 21^2 + 22^2 - 23^2 + 24^2 - 25^2$

$= (20 + 21)(20 - 21) + (22 + 23)(22 - 23)$

$\quad + (24 + 25)(24 - 25)$

$= 41 \times (-1) + 45 \times (-1) + 49 \times (-1) = -135$

39. $p^7 = 1$ 일 때, $(1-p)+(1-p^2)+(1-p^3)+\cdots+(1-p^6)$ 의 값을 구하여라. (단, $p \neq \pm 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$p^7 - 1 = 0$ 이므로

$(p-1)(p^6+p^5+p^4+p^3+p^2+p+1) = 0$ 에서

$p^6+p^5+p^4+p^3+p^2+p+1 = 0$ 이므로

$\therefore (1-p)+(1-p^2)+(1-p^3)+\cdots+(1-p^6)$

$= 6-(p^6+p^5+p^4+p^3+p^2+p)$

$= 6-(-1)$

$= 7$

40. 이차방정식 $x-\frac{5}{x}=7$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2-7\alpha+7)(\beta^2-7\beta+3)$ 의 값을 구하면?

① 21 ② 35 ③ 60 ④ 96 ⑤ 140

해설

$x-\frac{5}{x}=7$ 에서 양변에 x 를 곱하면 $x^2-7x-5=0$
이 식에 $x=\alpha$,β 를 각각 대입하면
$\alpha^2-7\alpha-5=0$ 에서 $\alpha^2-7\alpha=5$
$\beta^2-7\beta-5=0$ 에서 $\beta^2-7\beta=5$
$\therefore$ $(\alpha^2-7\alpha+7)(\beta^2-7\beta+3)=(5+7)(5+3)=96$