

1. 다음 중 옳지 않은 것은 무엇인가?

① $a > 0$ 일 때, $\sqrt{9a^2} = 3a$

② $a < 0$ 일 때, $-\sqrt{4a^2} = 2a$

③ $a < 0$ 일 때, $-\sqrt{(-5a)^2} = -5a$

④ $a > 0$ 일 때, $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$

⑤ $a > 0$ 일 때, $-\sqrt{25a^2} = -5a$

해설

③ $a < 0$ 일 때,

$$-\sqrt{(-5a)^2} = -\sqrt{25a^2} = -|5a| = 5a$$

2. $a > 0$, $b < 0$ 일 때, $\sqrt{a^2} + \sqrt{(-b)^2} - \sqrt{4a^2} - \sqrt{b^2}$ 을 간단히 하면?

① $-a - b$

② $-a - 2b$

③ a

④ $-a$

⑤ $-a + 2b$

해설

$a > 0$ 이므로 $2a > 0$,

$b < 0$ 이므로 $-b > 0$, $b < 0$

$$(\sqrt{a})^2 + \sqrt{(-b)^2} - \sqrt{(2a)^2} - \sqrt{b^2}$$

$$= a + (-b) - (2a) - (-b)$$

$$= a - b - 2a + b = -a$$

3. $0 < a < 1$ 일 때, $\sqrt{a^2} + \sqrt{(a-1)^2}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$a > 0$ 이므로 $\sqrt{a^2} = a$,

$a < 1$ 이므로 $\sqrt{(a-1)^2} = -(a-1) = 1-a$

따라서 $\sqrt{a^2} + \sqrt{(a-1)^2} = a + 1 - a = 1$ 이다.

4. 다음 수를 큰 순서대로 바르게 나열한 것은?

보기

$$\sqrt{(-3)^2}, -3, -\sqrt{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\textcircled{1} -3 > -\sqrt{3} > -\frac{1}{\sqrt{3}} > -\frac{1}{3} > \sqrt{(-3)^2}$$

$$\textcircled{2} -3 > -\frac{1}{3} > -\frac{1}{\sqrt{3}} > -\sqrt{3} > \sqrt{(-3)^2}$$

$$\textcircled{3} \sqrt{(-3)^2} > -\frac{1}{3} > -\frac{1}{\sqrt{3}} > -\sqrt{3} > -3$$

$$\textcircled{4} \sqrt{(-3)^2} > -3 > -\sqrt{3} > -\frac{1}{3} > -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\textcircled{5} -\frac{1}{3} > \sqrt{(-3)^2} > -\sqrt{3} > -3 > -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

해설

음수는 음수끼리 비교한다.

부호를 제외하고 제곱을 하면

$$-3^2 = -9, -(\sqrt{3})^2 = -3$$

$$-\frac{1^2}{3} = -\frac{1}{9}, -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = -\frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

$$\therefore -\frac{1}{3} > -\frac{1}{\sqrt{3}} > -\sqrt{3} > -3$$

$$\therefore \sqrt{(-3)^2} > -\frac{1}{3} > -\frac{1}{\sqrt{3}} > -\sqrt{3} > -3$$

5. $\frac{3\sqrt{a-4}}{\sqrt{18}} = 3$ 일 때, a 의 값은?

① 24

② 22

③ 20

④ 18

⑤ 16

해설

$$\frac{3\sqrt{a-4}}{\sqrt{18}} = \frac{3\sqrt{a-4} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{a-4} \times \sqrt{2}}{2} = 3$$

$$\sqrt{a-4} \times \sqrt{2} = 6 = \sqrt{36}$$

$$(a-4) \times 2 = 36$$

$$a-4 = 18$$

$$\therefore a = 22$$

6. $\sqrt{108} - \sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{24}$ 를 $a\sqrt{3} + b\sqrt{6}$ 의 꼴로 고칠 때, $a - b$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{108} - \sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{24} \\ &= 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \\ &= -\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \\ &\therefore a - b = -1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

7. 다음 중 $\sqrt{60}$ 의 값과 숫자 배열이 같은 것을 모두 고르면?

① $\sqrt{0.6}$

② $\sqrt{600}$

③ $\sqrt{6000}$

④ $\sqrt{60000}$

⑤ $\sqrt{0.0006}$

해설

$\sqrt{60}$ 이 들어가는 형태로 표현할 수 있으면 $\sqrt{60}$ 과 숫자 배열이 같은 수이다.

① $\sqrt{0.6} = \sqrt{\frac{6}{10}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{60}}{10}$

② $\sqrt{600} = 10\sqrt{6}$

③ $\sqrt{6000} = 10\sqrt{60}$

④ $\sqrt{60000} = 100\sqrt{6}$

⑤ $\sqrt{0.0006} = \sqrt{\frac{6}{10000}} = \frac{\sqrt{6}}{100}$

②, ④, ⑤는 $\sqrt{6}$ 과 숫자 배열이 같은 수

8. $x^2 + 4(a+b)x + 3a^2 + 6ab + 3b^2$ 을 인수분해하면?

① $(x+a+b)(x-a-b)$

② $(x+a+b)(x+2a+2b)$

③ $(x+a+b)(x+2a+3b)$

④ $(x+a+b)(x+3a+2b)$

⑤ $(x+a+b)(x+3a+3b)$

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + 4(a+b)x + 3a^2 + 6ab + 3b^2 \\ &= x^2 + 4(a+b)x + 3(a+b)^2 \\ &= (x+a+b)(x+3a+3b) \end{aligned}$$

9. 이차방정식 $x^2 - (a + 2)x + 3a + 2 = 0$ 의 한 근이 $x = 2$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 - (a + 2)x + 3a + 2 = 0$ 에 $x = 2$ 를 대입하면,

$$2^2 - (a + 2) \times 2 + 3a + 2 = 0$$

$$4 - 2a - 4 + 3a + 2 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

10. 이차방정식 $x^2 - x - 6 = 0$ 의 두 근의 합이 $3x^2 - 5x + a = 0$ 의 근일 때, 다른 한 근은?

① $-\frac{5}{2}$

② $-\frac{3}{2}$

③ 1

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$$x^2 - x - 6 = 0, (x - 3)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 3 \text{ 또는 } x = -2$$

두 근의 합은 1이다.

$3x^2 - 5x + a = 0$ 에 $x = 1$ 을 대입하면

$$3 - 5 + a = 0 \quad \therefore a = 2$$

$$3x^2 - 5x + 2 = 0, (x - 1)(3x - 2) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}$$

11. 이차방정식 $x^2 + (k-1)x + \frac{9}{16} = 0$ 이 중근을 가질 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = \frac{5}{2}$

해설

$$x^2 + (k-1)x + \frac{9}{16} = 0$$

$$\text{i) } \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = 0, \quad x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = 0$$
$$-\frac{3}{2} = k-1, \quad k = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ii) } \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = 0, \quad x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = 0$$
$$\frac{3}{2} = k-1, \quad k = \frac{5}{2}$$

(i), (ii)에 의하여 k 는 양수이므로 $k = \frac{5}{2}$ 이다.

12. 다음 중 이차방정식과 그 근이 알맞게 짝지어진 것은?

① $2 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{2}{3}$

② $2(x - 3)^2 = 6 \rightarrow x = 3 \pm \sqrt{3}$

③ $3(x - 1)(x - 3) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$ 또는 $x = 1$

④ $x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow x = -5$ 또는 $x = 3$

⑤ $3(x - 1)^2 = 12 \rightarrow x = -3$ 또는 $x = 1$

해설

① $3x^2 = 2, x^2 = \frac{2}{3}, x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$

③ $3(x - 1)(x - 3) = 0, x = 1$ 또는 $x = 3$

④ $x^2 - 2x = 15, (x - 1)^2 = 16, x - 1 = \pm 4, x = 5$ 또는 $x = -3$

⑤ $3(x - 1)^2 = 12, (x - 1)^2 = 4, x - 1 = \pm 2, x = 3$ 또는 $x = -1$

13. 다음 보기에서 옳은 것의 개수는?

보기

- ㉠ $\frac{\pi}{4}$ 는 유리수가 아니다.
- ㉡ 모든 무한소수는 무리수이다.
- ㉢ $1 - \sqrt{7}, \sqrt{121}, -\sqrt{15^2}, \pi$ 는 모두 무리수이다.
- ㉣ 무리수이면서 유리수인 수는 없다.
- ㉤ 음이 아닌 수의 제곱근은 반드시 2개가 있고, 그 절댓값은 같다.

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

- ㉡ 순환소수는 유리수이다.
- ㉢ $\sqrt{121}, -\sqrt{15^2}$ 는 유리수이다.
- ㉤ 0의 제곱근은 0의 1개 뿐이다.

14. $x^2 = 4$, $y^2 = 9$ 이고 $x - y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① -10

② -5

③ 0

④ 5

⑤ 10

해설

$$x = \pm 2, y = \pm 3$$

$$x - y = -1, 5, -5, 1$$

$$\therefore M - m = 5 - (-5) = 10$$

15. $\sqrt{90-x} - \sqrt{7+x}$ 의 값이 가장 큰 자연수가 되도록 하는 자연수 x 의 값은?

① 5

② 9

③ 15

④ 26

⑤ 30

해설

$\sqrt{90-x}$, $\sqrt{7+x}$ 둘 다 자연수가 되어야 한다. $\sqrt{90-x}$ 가 최대
 $\sqrt{7+x}$ 가 최소가 되려면 $x=9$ 이어야 한다.

16. $\sqrt{18}+3$ 과 $\sqrt{15}-2$ 중 큰 수를 a , $2\sqrt{7}$ 과 $3\sqrt{2}-1$ 중 작은 수를 b 라고 할 때, $b-a$ 의 값을 구하면?

① 4

② 2

③ 0

④ -2

⑤ -4

해설

$$\textcircled{1} \quad \sqrt{18}+3-(\sqrt{15}-2)=\sqrt{18}+3-\sqrt{15}+2>0$$

$$\therefore \sqrt{18}+3>\sqrt{15}-2$$

$$\textcircled{2} \quad 2\sqrt{7}-(3\sqrt{2}-1)=2\sqrt{7}-3\sqrt{2}+1=\sqrt{28}-\sqrt{18}+1>0$$

$$\therefore 2\sqrt{7}>3\sqrt{2}-1$$

$$\therefore a=\sqrt{18}+3=3\sqrt{2}+3, b=3\sqrt{2}-1$$

$$b-a=3\sqrt{2}-1-(3\sqrt{2}+3)=-4 \text{ 이다.}$$

17. $x, y > 0$ 이고, $\sqrt{\frac{6}{x}} \times \sqrt{3x^2} \times \sqrt{18x} = 90$, $y = x + 2$ 일 때, $3\sqrt{7} \times \frac{1}{\sqrt{y}} \times \sqrt{y-3}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\sqrt{\frac{6}{x}} \times \sqrt{3x^2} \times \sqrt{18x} = 90$$

$$\sqrt{\frac{6}{x} \times 3x^2 \times 18x} = 90$$

$$\sqrt{18^2 \times x^2} = 90$$

$$18x = 90$$

$$\therefore x = 5$$

$$y = x + 2 \text{ 이므로 } \therefore y = 7$$

$$\begin{aligned} \therefore 3\sqrt{7} \times \frac{1}{\sqrt{y}} \times \sqrt{y-3} &= 3\sqrt{7} \times \frac{1}{\sqrt{7}} \times \sqrt{4} \\ &= 3 \times 2 = 6 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

18. 다음을 만족하는 유리수 a, b, c 에 대하여 $\sqrt{\frac{2ab}{c}}$ 의 값은?

$$\frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{a}, \quad \sqrt{135} = 3\sqrt{b}, \quad \sqrt{2000} = c\sqrt{5}$$

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ 2

④ $\sqrt{5}$

⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$\frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 8} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2} = \sqrt{a}$$

$$\therefore a = 2$$

$$\sqrt{135} = \sqrt{3^3 \times 5} = 3\sqrt{15} = 3\sqrt{b}$$

$$\therefore b = 15$$

$$\sqrt{2000} = \sqrt{20^2 \times 5} = 20\sqrt{5} = c\sqrt{5}$$

$$\therefore c = 20$$

$$\therefore \sqrt{\frac{2ab}{c}} = \sqrt{\frac{2 \times 2 \times 15}{20}} = \sqrt{3}$$

19. $\sqrt{0.96}$ 은 $\sqrt{6}$ 의 x 배이다. 이 때, x 의 값은?

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{8}{5}$

④ $\frac{12}{5}$

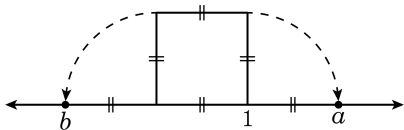
⑤ $\frac{16}{5}$

해설

$$\sqrt{0.96} = \sqrt{\frac{96}{100}} = \sqrt{\frac{4^2 \times 6}{10^2}} = \frac{4}{10} \sqrt{6} = \frac{2}{5} \sqrt{6}$$

$$\therefore x = \frac{2}{5}$$

20. 다음 그림의 사각형은 넓이가 2 인 정사각형이다. $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ 의 값은?



① $\sqrt{2} - 2$

② $\sqrt{2} - 1$

③ $\sqrt{2}$

④ $2 - \sqrt{2}$

⑤ 3

해설

넓이가 2 인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$

$$a = 1 + \sqrt{2}, b = 1 - \sqrt{2}$$

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2})$$

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \sqrt{2} - 1$$

21. 세 실수 $A = \sqrt{20} + \sqrt{80}$, $B = \sqrt{21} + \sqrt{79}$, $C = \sqrt{22} + \sqrt{78}$ 의 대소 관계가 바르게 된 것은?



① $A < B < C$

② $A < C < B$

③ $B < A < C$

④ $C < A < B$

⑤ $C < B < A$

해설

A , B , C 가 모두 양수이므로 A^2 , B^2 , C^2 을 구해서 비교해도 좋다.

$$\begin{aligned} A^2 &= (\sqrt{20} + \sqrt{80})^2 \\ &= 20 + 2\sqrt{20 \times 80} + 80 = 100 + 2\sqrt{1600} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^2 &= (\sqrt{21} + \sqrt{79})^2 \\ &= 21 + 2\sqrt{21 \times 79} + 79 = 100 + 2\sqrt{1659} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^2 &= (\sqrt{22} + \sqrt{78})^2 \\ &= 22 + 2\sqrt{22 \times 78} + 78 = 100 + 2\sqrt{1716} \end{aligned}$$

$$\sqrt{1600} < \sqrt{1659} < \sqrt{1716} \text{ 이므로 } A^2 < B^2 < C^2$$

$$\therefore A < B < C$$

22. $Ax^2 + 36x + B = (2x + C)^2$ 에서 양수 A, B, C 의 합을 구하면?

① 4

② 9

③ 81

④ 90

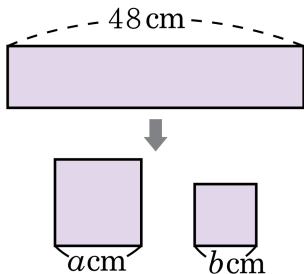
⑤ 94

해설

$Ax^2 + 36x + B = 4x^2 + 2 \times 2Cx + C^2$ 이므로 $A = 4, B = 81, C = 9$ 이다.

따라서 $A + B + C = 4 + 81 + 9 = 94$ 이다.

23. 다음 그림과 같이 48 cm 인 끈을 적당히 두 개로 잘라 한 변의 길이가 각각 a cm 와 b cm 인 정사각형 두 개를 만들었다. 이 때, 두 정사각형의 넓이의 합이 74 cm^2 일 때, 넓이의 차를 구하여라. (단, $a > b > 0$)



▶ 답 : cm^2

▷ 정답 : 24 cm^2

해설

$$4a + 4b = 48 \text{ 이므로 } a + b = 12$$

$$\text{또, } a^2 + b^2 = 74$$

$$(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

$$74 = 144 - 2ab$$

$$ab = 35$$

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 144 - 140 = 4$$

$$a - b > 0, \quad a - b = 2$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 12 \times 2 = 24(\text{cm}^2)$$

24. $x^4 - 13x^2 + 36$ 을 인수분해했을 때, 일차식으로 이루어진 인수들의 합을 구하면?

① $4x + 13$

② $4x$

③ $4x - 13$

④ $2x^2 - 13$

⑤ $2x^2 + 5$

해설

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 9)(x^2 - 4)$$

$$= (x + 3)(x - 3)(x + 2)(x - 2)$$

∴ (일차식 인수들의 합)

$$= x + 3 + x - 3 + x + 2 + x - 2 = 4x$$

25. 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a + b + c$ 의 값은?

$$\frac{ax^2 - 3x - b}{4x^2 + cx - 5} = 2$$

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{7}{2}$

③ $\frac{9}{2}$

④ $\frac{11}{2}$

⑤ $\frac{33}{2}$

해설

$$\frac{ax^2 - 3x - b}{4x^2 + cx - 5} = 2 \text{를 정리하면,}$$

$$(a - 8)x^2 + (-3 - 2c)x - b + 10 = 0$$

이 식이 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 성립하므로 x 에 대한
항등식이다.

$$\text{따라서 } a - 8 = 0, \quad -3 - 2c = 0, \quad -b + 10 = 0$$

$$\therefore a = 8, \quad b = 10, \quad c = -\frac{3}{2}$$

$$a + b + c = \frac{33}{2} \text{ 이다.}$$

26. 이차방정식 $3x^2 - x + 2 = 0$ 의 한 근을 A , 이차방정식 $x^2 - 3x - 6 = 0$ 의 한 근을 B 라 할 때, $3A^2 + B^2 - A - 3B$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$3A^2 - A + 2 = 0, B^2 - 3B - 6 = 0 \text{ 이므로}$$

$$3A^2 - A = -2, B^2 - 3B = 6$$

$$\begin{aligned} \therefore 3A^2 + B^2 - A - 3B \\ &= 3A^2 - A + B^2 - 3B \\ &= -2 + 6 = 4 \end{aligned}$$

27. x 에 대한 이차방정식 $(m-1)x^2 - (m^2 + 2m - 2)x + 21 = 0$ 의 한 근이 3일 때, 두 근을 모두 양수가 되게 하는 m 의 값과 나머지 한 근의 합을 구하면?

① $\frac{13}{2}$

② $\frac{15}{2}$

③ $\frac{17}{2}$

④ $\frac{19}{2}$

⑤ $\frac{21}{2}$

해설

한 근이 3 이므로 $x = 3$ 을 대입하면

$$9(m-1) - 3(m^2 + 2m - 2) + 21 = 0$$

$$m^2 - m - 6 = 0, (m-3)(m+2) = 0$$

$$\therefore m = 3 \text{ 또는 } m = -2$$

i) $m = -2$ 이면 $-3x^2 + 2x + 21 = 0$

$$3x^2 - 2x - 21 = 0, (3x+7)(x-3) = 0$$

$$x = -\frac{7}{3} \text{ 또는 } x = 3 \text{ (한 근이 음수이므로 부적합)}$$

ii) $m = 3$ 이면 $2x^2 - 13x + 21 = 0$

$$(x-3)(2x-7) = 0$$

$$x = 3 \text{ 또는 } x = \frac{7}{2} \text{ (두 근이 모두 양수이므로 적합)}$$

따라서 $m = 3$, 나머지 한 근은 $x = \frac{7}{2}$

$$\therefore m + x = 3 + \frac{7}{2} = \frac{13}{2}$$

28. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$ 의 근에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $k = -6$ 이면 근이 2 개이다.
- ② $k = -1$ 이면 정수인 근을 갖는다.
- ③ $k = 0$ 이면 무리수인 근을 갖는다.
- ④ $k = 2$ 이면 근이 1 개이다.
- ⑤ $k = 4$ 이면 근이 없다.

해설

$$(x-1)^2 = 3-k, \quad x-1 = \pm\sqrt{3-k}$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3-k}$$

음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$3 > k$: 근이 0 개

$k = 3$: 근이 1 개

$3 < k$: 근이 2 개

29. 5의 음의 제곱근을 a , 2의 양의 제곱근을 b 라 할 때, $\sqrt{-a^2 + 3b^2} - \sqrt{(a^2 \times b^2)^2}$ 을 계산하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -9

해설

$$a = -\sqrt{5}, b = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{-a^2 + 3b^2} - \sqrt{(a^2 \times b^2)^2} \\ &= \sqrt{-(-\sqrt{5})^2 + 3(\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{\left\{ (-\sqrt{5})^2 \times (\sqrt{2})^2 \right\}^2} \\ &= \sqrt{-5 + 6} - \sqrt{(5 \times 2)^2} \\ &= 1 - 10 = -9 \end{aligned}$$

30. 부등식 $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x}} < \frac{1}{2}$ 을 만족하는 자연수 x 를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 4

해설

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x}} < \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$2 < \sqrt{2x} \leq 3$$

각 변을 제곱하면

$$4 < 2x \leq 9$$

$$2 < x \leq \frac{9}{2}$$

따라서 주어진 조건을 만족하는 자연수는 3, 4 이다.

31. 두 정육면체 A, B의 한 면의 대각선의 길이의 비가 2: 3이고 두 정육면체의 부피의 합이 35 cm^3 이다. A, B의 한 모서리의 길이를 각각 $a\text{ cm}, b\text{ cm}$ 라 할 때 $b - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $b - a = 1$

해설

A, B의 한 모서리의 길이를 각각 $a\text{ cm}, b\text{ cm}$ 라 할 때

A, B의 대각선의 길이의 비는 $a\sqrt{2} : b\sqrt{2} = 2 : 3$ 이므로 $2b\sqrt{2} = 3a\sqrt{2}$

b 에 대해 정리하면 $b = \frac{3}{2}a$ ($\because a > 0, b > 0$)

A, B의 부피의 합은

$$a^3 + b^3 = 35, a^3 + \left(\frac{3}{2}a\right)^3 = 35, a^3 = 8$$

$$\therefore a = 2, b = 3$$

따라서 $b - a = 1$ 이다.

32. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ 이고, $S(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(x)$ 이라고 한다. 100 이하의 자연수 n 에 대하여 $S(n)$ 의 값이 자연수가 되는 n 을 모두 고르면?

① 8

② 15

③ 35

④ 50

⑤ 99

해설

$$S(n) = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots +$$

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1$$

① $n = 8$ 일 때, $S(n) = 3 - 1 = 2$

② $n = 15$ 일 때, $S(n) = 4 - 1 = 3$

③ $n = 35$ 일 때, $S(n) = 6 - 1 = 5$

④ $n = 50$ 일 때, $S(n) = \sqrt{51} - 1$

⑤ $n = 99$ 일 때, $S(n) = 10 - 1 = 9$

따라서 ①, ②, ③, ⑤가 답이다.

33. 가로, 세로, 높이의 길이가 각각 x , y , z 인 직육면체에 대하여 $x : y : z = (\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) : (2\sqrt{3} - \sqrt{5}) : (\sqrt{5} - \sqrt{2})$ 이고 모서리의 길이의 합이 $4\sqrt{27}$ 일 때, $xy + yz$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $xy + yz = \frac{63}{16}$

해설

$$x : y : z = (\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) : (2\sqrt{3} - \sqrt{5}) : (\sqrt{5} - \sqrt{2}) \text{ 이므로}$$

$$\frac{x}{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} = \frac{y}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{z}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = k \text{라 하면}$$

$$x = (\sqrt{2} + 2\sqrt{3})k$$

$$y = (2\sqrt{3} - \sqrt{5})k$$

$$z = (\sqrt{5} - \sqrt{2})k$$

(단, $k > 0$)

직육면체의 모서리의 합이 $4\sqrt{27}$ 이므로

$$4(x + y + z) = 4\sqrt{27}, \quad x + y + z = \sqrt{27}$$

$$(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})k + (2\sqrt{3} - \sqrt{5})k + (\sqrt{5} - \sqrt{2})k = \sqrt{27}$$

$$4\sqrt{3}k = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \therefore k = \frac{3}{4}$$

$$\therefore xy + yz = \frac{3}{4}(\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) \times \frac{3}{4}(2\sqrt{3} - \sqrt{5}) + \frac{3}{4}(2\sqrt{3} - \sqrt{5}) \times$$

$$\frac{3}{4}(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = \frac{63}{16}$$

34. $f(a) = \sqrt{a+1} + \sqrt{a}$ 일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \cdots + \frac{1}{f(80)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(a)} &= \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} \\&= \frac{\sqrt{a+1} - \sqrt{a}}{(\sqrt{a+1} + \sqrt{a})(\sqrt{a+1} - \sqrt{a})} \\&= \frac{\sqrt{a+1} - \sqrt{a}}{a+1-a} \\&= \sqrt{a+1} - \sqrt{a} \text{ 이므로} \\(\text{준식}) &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \\&\quad \cdots + (\sqrt{81} - \sqrt{80}) \\&= \sqrt{81} - \sqrt{1} = 9 - 1 = 8\end{aligned}$$

35. $[a]$ 는 a 를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다. 예를 들면 $[3] = 3$, $[3.4] = 3$ 이다.

$a = 2 + \sqrt{3}$ 일 때, $\frac{[a] + 1}{a} + \frac{2a}{[a] - a}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $3 - 7\sqrt{3}$

해설

$[2 + \sqrt{3}] = 3$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{3+1}{2+\sqrt{3}} + \frac{2(2+\sqrt{3})}{3-(2+\sqrt{3})} \\&= \frac{4(2-\sqrt{3})}{4-3} + \frac{2(2+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{1-3} \\&= 8-4\sqrt{3} - (2+3\sqrt{3}+3) \\&= 3-7\sqrt{3}\end{aligned}$$

36. 0 부터 9 까지의 숫자가 적힌 카드 10 장이 있다. 이 중 2 장을 택해 카드에 적힌 숫자를 x, y 라고 할 때, $\sqrt{xy+x-3y-3}$ 가 자연수가 되는 경우의 수는 모두 몇 가지인지 구하여라.

▶ 답: 11 가지

▷ 정답: 11 가지

해설

$$\sqrt{xy+x-3y-3} = \sqrt{(x-3)(y+1)} \text{ 이므로}$$

$(x-3)(y+1)$ 이 완전제곱수일 때, 주어진 식이 자연수가 된다.

$$(x-3)(y+1) = 1 \text{ 일 때, } (x, y) = (4, 0)$$

$$(x-3)(y+1) = 4 \text{ 일 때,}$$

$$(x, y) = (4, 3)(5, 1)(7, 0)$$

$$(x-3)(y+1) = 9 \text{ 일 때, } (x, y) = (4, 8)(6, 2)$$

$$(x-3)(y+1) = 16 \text{ 일 때, } (x, y) = (5, 7)(7, 3)$$

$$(x-3)(y+1) = 25 \text{ 일 때, } (x, y) = (8, 4)$$

$$(x-3)(y+1) = 36 \text{ 일 때, } (x, y) = (7, 8)(9, 5)$$

따라서 $\sqrt{xy+x-3y-3}$ 가 자연수가 되는 경우의 수는 모두 11 가지이다.

37. 다항식 $a^2x + 1 - x - a^2$ 을 인수분해하였을 때, 다음 <보기> 중 그 인수가 될 수 있는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $x + 1$

㉡ $a + 1$

㉢ $x^2 + 1$

㉣ $a - 1$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^2x - a^2 - x + 1 \\&= a^2(x - 1) - (x - 1) \\&= (a^2 - 1)(x - 1) \\&= (a + 1)(a - 1)(x - 1)\end{aligned}$$

38. 다음을 계산하여라.

$$20^2 - 21^2 + 22^2 - 23^2 + 24^2 - 25^2$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -135

해설

$$\begin{aligned} & 20^2 - 21^2 + 22^2 - 23^2 + 24^2 - 25^2 \\ &= (20 + 21)(20 - 21) + (22 + 23)(22 - 23) \\ &\quad + (24 + 25)(24 - 25) \\ &= 41 \times (-1) + 45 \times (-1) + 49 \times (-1) = -135 \end{aligned}$$

39. $p^7 = 1$ 일 때, $(1 - p) + (1 - p^2) + (1 - p^3) + \cdots + (1 - p^6)$ 의 값을 구하여라. (단, $p \neq \pm 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$p^7 - 1 = 0$ 이므로

$(p - 1)(p^6 + p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p + 1) = 0$ 에서

$p^6 + p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 = 0$ 이므로

$\therefore (1 - p) + (1 - p^2) + (1 - p^3) + \cdots + (1 - p^6)$

$= 6 - (p^6 + p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p)$

$= 6 - (-1)$

$= 7$

40. 이차방정식 $x - \frac{5}{x} = 7$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2 - 7\alpha + 7)(\beta^2 - 7\beta + 3)$ 의 값을 구하면?

① 21

② 35

③ 60

④ 96

⑤ 140

해설

$$x - \frac{5}{x} = 7 \text{ 에서 양변에 } x \text{ 를 곱하면 } x^2 - 7x - 5 = 0$$

이 식에 $x = \alpha, \beta$ 를 각각 대입하면

$$\alpha^2 - 7\alpha - 5 = 0 \text{ 에서 } \alpha^2 - 7\alpha = 5$$

$$\beta^2 - 7\beta - 5 = 0 \text{ 에서 } \beta^2 - 7\beta = 5$$

$$\therefore (\alpha^2 - 7\alpha + 7)(\beta^2 - 7\beta + 3) = (5 + 7)(5 + 3) = 96$$