1. 등식 $\left(\dfrac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\dfrac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right)=a+bi$ 를 만족하는 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b=9$

해설

$$(\text{좌변})=\frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$$
$$=\frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2}$$
$$=\frac{6-7i}{3}=2-\frac{7}{3}i \text{ 이므로}$$

$2-\frac{7}{3}i=a+bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=2,\ b=-\frac{7}{3}$

$\therefore\ a-3b=2-3\times\left(-\frac{7}{3}\right)=2+7=9$

2. $i^{2000} + i^{2002} + i^{2003} + i^{2004}$ 의 값을 구하면?

① 1　② $1 - i$　③ $1 + i$　④ -1　⑤ 0

해설

$i^4 = 1$ 이므로

$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 1 + (-1) + (-i) + 1 \\ &= 1 - i\end{aligned}$$

3. 복소수 $(1+2i)x-(2+i)y+i$를 제곱하였더니 -9가 되었다. 이 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이고 x, y는 실수이다.)

① 2 또는 −4　　② 2 또는 −3　　③ −1 또는 3
④ −1 또는 −3　　⑤ −1 또는 −2

해설

$z=(x-2y)+(2x-y+1)\,i$
$z^2=-9$
즉, z는 순허수이다.
$\therefore\ x-2y=0,\ (2x-y+1)^2=9$
$x=2y$ 와 $2x-y+1=\pm 3$을 연립하여 풀면
$y=\frac{2}{3}\rightarrow x=\frac{4}{3}$
$y=-\frac{4}{3}\rightarrow x=-\frac{8}{3}$
$\therefore\ x+y=2$ 또는 -4 이다.

4. $\alpha = 1+i,\ \beta = 1-i$ 일 때, $\dfrac{\alpha^2}{\beta} + \dfrac{\beta^2}{\alpha}$ 의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=2$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha} &= \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}\\ &= \frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\\ &= \frac{8-12}{2}\\ &= -2\end{aligned}$$

5. 복소수 z 에 대하여 다음 보기 중 항상 실수인 것을 <u>모두</u> 고르면?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $z \neq 0$ 이다

㉠ $z+\bar{z}$	㉡ $z\bar{z}$	㉢ $(z-\bar{z})^2$
㉣ $\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}$	㉤ $\frac{\bar{z}}{z}$	

① ㉠　② ㉠ ,㉡

③ ㉠ ,㉡ ,㉢　④ ㉠ ,㉡ ,㉢ ,㉣

⑤ ㉠ ,㉡ ,㉢ ,㉣ ,㉤

해설

$z=a+bi$ 라 하자 $\Rightarrow$ $\bar{z}=a-bi$

㉠ $z+\bar{z}=2a$

㉡ $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

㉢ $(z-\bar{z})^2=(2bi)^2=-4b^2$

㉣ $\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}-\frac{a+bi}{a^2+b^2}=\frac{-2bi}{a^2+b^2}$

㉤ $\frac{\bar{z}}{z}=\frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}$