

1. 등식 $\left(\frac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\frac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right) = a+bi$ 를 만족하는 실수 a, b 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b = 9$

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= \frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)} \\&= \frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2} \\&= \frac{6-7i}{3} = 2 - \frac{7}{3}i \text{ 이므로}\end{aligned}$$

$$2 - \frac{7}{3}i = a + bi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a = 2, b = -\frac{7}{3}$$

$$\therefore a - 3b = 2 - 3 \times \left(-\frac{7}{3}\right) = 2 + 7 = 9$$

2. $i^{2000} + i^{2002} + i^{2003} + i^{2004}$ 의 값을 구하면?

① 1

② $1 - i$

③ $1 + i$

④ -1

⑤ 0

해설

$i^4 = 1$ 이므로

$$i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= 1 + (-1) + (-i) + 1 \\ &= 1 - i \end{aligned}$$

3. 복소수 $(1 + 2i)x - (2 + i)y + i$ 를 제공하였더니 -9 가 되었다. 이 때, $x + y$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이고 x, y 는 실수이다.)

- ① 2 또는 -4 ② 2 또는 -3 ③ -1 또는 3
④ -1 또는 -3 ⑤ -1 또는 -2

해설

$$z = (x - 2y) + (2x - y + 1)i$$

$$z^2 = -9$$

즉, z 는 순허수이다.

$$\therefore x - 2y = 0, (2x - y + 1)^2 = 9$$

$x = 2y$ 와 $2x - y + 1 = \pm 3$ 을 연립하여 풀면

$$y = \frac{2}{3} \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$y = -\frac{4}{3} \rightarrow x = -\frac{8}{3}$$

$\therefore x + y = 2$ 또는 -4 이다.

4. $\alpha = 1 + i$, $\beta = 1 - i$ 일 때, $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 2$$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} &= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} \\ &= \frac{8 - 12}{2} \\ &= -2\end{aligned}$$

5. 복소수 z 에 대하여 다음 보기 중 항상 실수인 것을 모두 고르면?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $z \neq 0$ 이다)

㉠ $z + \bar{z}$

㉡ $z\bar{z}$

㉢ $(z - \bar{z})^2$

㉤ $\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}$

㉦ $\frac{\bar{z}}{z}$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤, ㉥, ㉦

해설

$$z = a + bi \text{ 라 하자 } \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$\text{㉠ } z + \bar{z} = 2a$$

$$\text{㉡ } z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

$$\text{㉢ } (z - \bar{z})^2 = (2bi)^2 = -4b^2$$

$$\text{㉤ } \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} - \frac{a + bi}{a^2 + b^2} = \frac{-2bi}{a^2 + b^2}$$

$$\text{㉦ } \frac{\bar{z}}{z} = \frac{(a - bi)^2}{a^2 + b^2}$$