

1. $(a+1)(a^2-a+1) = a^3+1$ 을 이용하여 $\frac{1999^3+1}{1998 \times 1999+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2000

해설

$$\begin{aligned} a &= 1999 \text{라 하면} \\ 1998 \times 1999 + 1 &= (a-1)a + 1 = a^2 - a + 1 \\ \therefore \frac{1999^3 + 1}{1998 \times 1999 + 1} &= \frac{a^3 + 1}{a^2 - a + 1} \\ &= \frac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} \\ &= a + 1 = 2000 \end{aligned}$$

2. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값은?

① $1-i$

② 0

③ $-1-i$

④ 2

⑤ $1+i$

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i, \frac{1-i}{1+i} = -i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$$

$$= f(i) + f(-i)$$

$$= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}$$

$$= (-i)^{100} + (i)^{100} = 2$$

$$\ast i^4 = 1 \text{ 이므로 } i^{4k} = 1$$

3. 이차방정식 $(\sqrt{2}+1)x^2 + x - \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 0$ 의 두 근의 곱은?

- ① $-\sqrt{2}$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{2}-1$ 을 곱하면
 $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2 + (\sqrt{2}-1)x - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 0$
 $x^2 + (\sqrt{2}-1)x - \sqrt{2} = 0$
 $(x + \sqrt{2})(x - 1)$
 $\therefore x = -\sqrt{2}$ 또는 $x = 1$
따라서 두 근의 곱은 $-\sqrt{2}$

4. 다항식 $f(x)$ 를 $ax + b(a \neq 0)$ 로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 한다. $xf(x)$ 를 $x + \frac{b}{a}$ 로 나눈 나머지를 구하면?

- ① $\frac{bR}{a}$ ② $\frac{b}{Ra}$ ③ $-\frac{b}{a}R$ ④ $\frac{aR}{b}$ ⑤ $-\frac{aR}{b}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax + b)Q(x) + R \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + R \\ \therefore x \cdot f(x) &= ax\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + Rx \\ &= ax\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + R\left(x + \frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a}R \\ &= \left(x + \frac{b}{a}\right)\{axQ(x) + R\} - \frac{b}{a}R \end{aligned}$$

따라서, 구하는 몫은 $axQ(x) + R$
 나머지는 $-\frac{bR}{a}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax + b)Q(x) + R \text{에서} \\ \text{나머지 정리에 의해 } f\left(-\frac{b}{a}\right) &= R \\ x \cdot f(x) &= \left(x + \frac{b}{a}\right)Q'(x) + R' \text{이라 하면} \\ \text{나머지 정리에 의해 } -\frac{b}{a}f\left(-\frac{b}{a}\right) &= R' \\ f\left(-\frac{b}{a}\right) = R \text{를 대입하면 } R' &= -\frac{b}{a}R \end{aligned}$$

5. 연립부등식 $\begin{cases} 6 < -x + 2 < -2x - 1 \\ |x| < a \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 양수 a 의 값의 범위를 구하여라.

- ① $3 < a \leq 4$ ② $0 < a \leq 3$ ③ $0 < a < 3$
 ④ $0 < a \leq 4$ ⑤ $0 < a < 4$

해설

$$\begin{cases} 6 < -x + 2 < -2x - 1 \cdots \text{㉠} \\ |x| < a \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $6 < -x + 2$ 의 해는 $x < -4$

$-x + 2 < -2x - 1$ 의 해는 $x < -3$

$\therefore x < -4$

㉡에서 $|x| < a$ 는 $-a < x < a$ 두 연립부등식의 해가 없으려면

$-a \geq -4, a \leq 4,$

그런데 a 는 양수이므로 a 의 값의 범위는 $0 < a \leq 4$ 이다.