1. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = -\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = 3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = 6$

① ㉠,㉡　　② ㉢,㉣　　③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥　　⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = -\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} = -3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = \dfrac{4}{2i} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2}i \times \sqrt{5} = \sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = \sqrt{9} + (\sqrt{3}i)^2 = 0$

2. 복소수 $(1-xi)(1-i)$가 순허수가 되도록 실수 x의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x=1$

해설

$(1-xi)(1-i)=(1-x)+(-1-x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1-x=0$,
$x=1$

3. x, y가 양의 실수이고, $x^2 + xyi + y^2 - 5 - 2i = 0$일 때, $x + y$의 값을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - 2)i = 0$

$x^2 + y^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉠

$xy - 2 = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$

$\therefore\ x + y = 3$ ($\because$ x, y 는 양의 실수)

4. 다음 중 옳은 것은?

① $(1+\sqrt{-1})^3 = 2i + 4$

② $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = 2i$

③ $(-\sqrt{-3})^2 = 3$

④ $(\sqrt{-5})^3 = 5\sqrt{5}i$

⑤ $\sqrt{-3}\sqrt{-9} = -3\sqrt{3}$

해설

① $-2+2i$

② $-2i$

③ -3

④ $-5\sqrt{5}i$

5. $z=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ 일 때, $z^{101}=(a+bi)z$를 만족시키는 실수 a,b 에 대하여 a^2+b^2 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$z^2=-i$, $z^4=-1$
$z^{101}=(a+bi)z$ 에서 양변을 z 로 나누면
$z^{100}=a+bi$, $(z^4)^{25}=(-1)^{25}=a+bi$
$\therefore a+bi=-1 \Rightarrow a=-1, b=0$
$\therefore a^2+b^2=1$

6. $f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1000}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)-f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하면?

① i ② 2 ③ 1 ④ 0 ⑤ $2i$

해설

$\frac{1-i}{1+i}=-i,\ \frac{1+i}{1-i}=i$

$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)-f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$

$=f(-i)-f(i)$

$=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1000}-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1000}$

$=(-i)^{1000}-(i)^{1000}$

$=1-1$

$=0$

7. 임의의 자연수 m, n에 대하여 $i^{3m} + i^{3n+1}$ 이 나타낼 수 있는 서로 다른 복소수는 모두 몇 개 인가? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 4 개 ② 6 개 ③ 8 개 ④ 9 개 ⑤ 10 개

해설

i) $i^{3m} = (-i)^m \Rightarrow -i, -1, i, 1$

ii) $i^{3n+1} = (-i)^n \times i \Rightarrow 1, -i, -1, i$

$\therefore$ i+ ii 를 더해서 나올 수 있는 수는

$(0, 2, 1-i, 1+i, -1-i, -1+i, 2i, -2i, -2)$ 의 9가지 이다.

8. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x 의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0　② $\sqrt{3}$　③ $-\sqrt{3}$　④ 1　⑤ -1

해설

$$\begin{aligned} i(x+i)^3 &= i(x^3+3x^2i-3x-i) \\ &= (-3x^2+1)+(x^3-3x)i \end{aligned}$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$

9. $|x|(2+3i)+2|y|(1-2i)=6-5i$를 만족하는 실수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$(2|x|+2|y|)+(3|x|-4|y|)i=6-5i$

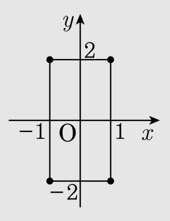
복소수의 상등에 의하여

$|x|+|y|=3,\ 3|x|-4|y|=-5$

두 식을 연립하면

$|x|=1,\ \ |y|=2$

$(x,\ y)\ \rightarrow\ (1,\ 2),\ (1,-2),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ -2)$



$\therefore$ 직사각형의 넓이 $=2\times4=8$

10. x에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$이 실근을 갖기 위한 실수 a의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$(ax^2+3x+2a)+(-ax^2+2ax+3)i=0$ 이어야 하므로

$ax^2+3x+2a=0 \cdots\cdots$ ㉠

$-ax^2+2ax+3=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ 하면

$(2a+3)x+(2a+3)=0$, $(2a+3)(x+1)=0$

$2a+3=0$ 또는 $x+1=0$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

i) $a=-\frac{3}{2}$ 일 때

㉠식에서 $-\frac{3}{2}x^2+3x-3=0,\ x^2-2x+2=0$

이므로 허근을 가진다. $\therefore\ a\neq-\frac{3}{2}$

ii) $x=-1$ 일 때 ㉠에 대입하면,

$a-3+2a=0,\ 3a=3 \quad \therefore\ a=1$

11. 유리수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $(\sqrt{2}+i)^4+a(\sqrt{2}+i)^3+b(\sqrt{2}+i)^2+c(\sqrt{2}+i)+d=0$을 만족한다. 이 때, $a-b-c-d$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① -7　　② 3　　③ 1　　④ -1

해설

$(\sqrt{2}+i)^4=-7+4\sqrt{2}i$, $(\sqrt{2}+i)^3=-\sqrt{2}+5i$,
$(\sqrt{2}+i)^2=1+2\sqrt{2}i$
$(-7+4\sqrt{2}i)+a(-\sqrt{2}+5i)$
$+b(1+2\sqrt{2}i)+c(\sqrt{2}+i)+d=0$
$(-7-\sqrt{2}a+b+\sqrt{2}c+d)$
$+(4\sqrt{2}+5a+2\sqrt{2}b+c)i=0$
$\therefore\ (-7+b+d)+(c-a)\sqrt{2}=0$,
$(5a+c)+(4+2b)\sqrt{2}=0$
$a,\ b,\ c,\ d$ 는 유리수이므로 $-7+b+d=0$:
$c-a=0,\ 5a+c=0,\ 4+2b=0$
$\therefore\ a=0,\ b=-2,\ c=0,\ d=9$
$\therefore\ a-b-c-d=-7$

12. α, β를 복소수라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\alpha + \beta i = 0$ 이면 $\alpha = 0,\ \beta = 0$

② $\alpha + \beta i = r + \delta i$ 이면 $\alpha = r,\ \beta = \delta$

③ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0,\ \beta = 0$

④ $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$

⑤ $\alpha^2 < 0$

해설

① $\alpha = 1,\ \beta = i$ 이면 $\alpha + \beta i = 1 + i^2 = 0$ 이지만 $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$ 이다.

② $\alpha = 1,\ \beta = 1$ 이면 $\alpha + \beta i = 1 + i$ 이고, $r = 2,\ \delta = -1 + i$ 이면 $r + \delta i = 1 + i$ 에서 $\alpha + \beta i = r + \delta i$ 이지만 $\alpha \neq r,\ \beta \neq \delta$ 이다.

③ $\alpha = 1,\ \beta = i$ 이면 $\alpha^2 + \beta^2 = 1 + i^2 = 0$ 이지만 $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$ 이다.

④ $\alpha \neq 0$ 이고 $\beta \neq 0$ 이라 가정하고 $\alpha\beta = 0$ 의 양변에 $\frac{1}{\alpha}$ 을 곱하면 $\beta = 0$ 이 되어 모순이다. 따라서 $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$ 이다.

⑤ $(\text{순허수})^2 < 0$ 이나 $\alpha = 1 + i$ 이면 $\alpha^2 = (1 + i)^2 = 2i$ 가 되어 양수도 음수도 아니다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

13. $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다.
$\alpha = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$을 간단히 하면?

① $1 + i$　② $1 - i$　③ $2 + i$
④ $2 - i$　⑤ $\sqrt{3} + i$

해설

$\alpha = a + bi,\ \alpha^t = b + ai$이므로
$\alpha\alpha^t = (a + bi)(b + ai) = (a^2 + b^2)i$
그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a + bi$에서
$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$　　$\therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\right)i = i$
$\therefore$ (준식)$= 2\alpha(\alpha \cdot \alpha^t)^4 = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3} + i}{2} \cdot i^4 = \sqrt{3} + i$

14. $f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① 1　　② $1-i$　　③ $1+i$　　④ -1　　⑤ 0

해설

$\frac{1+i}{1-i}=i$ 이므로

$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=f(i)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}=i^{100}=1$

15. 정수 n에 대해 $z = i^n + i^{-n}, i = \sqrt{-1}$을 만족하는 z의 개수는?

① 1개　　② 2개　　③ 3개
④ 4개　　⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1,
$i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i$, $i^n = -1$ 이면
$i^{-n} = -1$, $i^n = -i$ 이면
$i^{-n} = i$, $i^n = 1$ 이면
$i^{-n} = 1$
$\therefore\ i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$
$\therefore\ z$는 3개다.

16. 복소수들 사이의 연산 $*$가 다음과 같다고 하자.

$\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$

이 때, $(1+2i) * z = 1$을 만족시키는 복소수 z는?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1+i$　　② $1-i$　　③ $-1+i$

④ $-1-i$　　⑤ i

해설

$z = a + bi$라 하면

$(1+2i) * z$

$= (1+2i) + (a+bi) + (1+2i)(a+bi)i$

$= (-a-b+1) + (a-b+2)i = 1$

$-a-b+1 = 1,\ a-b+2 = 0$

$a = -1,\ b = 1$

$\therefore\ z = -1+i$

17. 복소수 z 에 대하여 다음 보기 중 항상 실수인 것을 모두 고르면?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $z \neq 0$ 이다

㉠ $z+\bar{z}$	㉡ $z\bar{z}$	㉢ $(z-\bar{z})^2$
㉣ $\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}$	㉤ $\frac{\bar{z}}{z}$	

① ㉠
② ㉠ ,㉡
③ ㉠ ,㉡ ,㉢
④ ㉠ ,㉡ ,㉢ ,㉣
⑤ ㉠ ,㉡ ,㉢ ,㉣ ,㉤

해설

$z=a+bi$ 라 하자 $\Rightarrow$ $\bar{z}=a-bi$
㉠ $z+\bar{z}=2a$
㉡ $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$
㉢ $(z-\bar{z})^2=(2bi)^2=-4b^2$
㉣ $\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}-\frac{a+bi}{a^2+b^2}=\frac{-2bi}{a^2+b^2}$
㉤ $\frac{\bar{z}}{z}=\frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}$

18. 복소수 $z=a+bi,\ w=b+ai$ ($a,\ b$는 $ab\neq 0$ 인 실수, $i=\sqrt{-1}$)에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, $\bar{z},\ \overline{w}$ 는 각각 $z,\ w$ 의 켤레복소수이다.)

① $i\bar{z}=w$ ② $\dfrac{\overline{w}}{\bar{z}}=\dfrac{z}{w}$

③ $z\cdot\overline{w}=\bar{z}\cdot w$ ④ $z\cdot\bar{z}=w\cdot\overline{w}$

⑤ $i(\bar{z}+\overline{w})=z\ +\ w$

해설

① : $i\bar{z}=i(a-bi)=b+ai=w$

② :①에서 $\bar{z}=-iw$ ⋯⋯ ㉠

같은 방법으로 $\overline{w}=-iz$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 대입하면 $\dfrac{\overline{w}}{\bar{z}}=\dfrac{-iz}{-iw}=\dfrac{z}{w}$

③ :㉠, ㉡을 대입하면

(좌변) $=z\cdot(-iz)=-iz^2$,

(우변) $=(-iw)\cdot w=-iw^2$

∴ 좌변≠우변

④ : ②에서 $z\cdot\bar{z}=w\cdot\overline{w}$

⑤ : $i(\bar{z}+\overline{w})=i\bar{z}+i\overline{w}=w+z=z+w$

19. 두 복소수 x, y 에 대하여 $x+y=2+3i$ 라 할 때, $x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+y\overline{y}$ 의 값은?

① 13　　② $11+2i$　　③ 12

④ $12-i$　　⑤ 11

해설

$x+y=2+3i$, $\overline{x}+\overline{y}=2-3i$

$x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+y\overline{y}$

$=x(\overline{x}+\overline{y})+y(\overline{x}+\overline{y}))$

$=(x+y)(\overline{x}+\overline{y})$

$=(2+3i)(2-3i)$

$=13$

20. $x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 근을 z라 한다. $p = \dfrac{1+z}{3-z}$ 일 때, $7p \cdot \overline{p}$ 의 값을 구하면?

① 5　　② 4　　③ 3　　④ 2　　⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이 z, $\overline{z}$ 이므로

$z + \overline{z} = 1$, $z\overline{z} = 1$

$$\begin{aligned} 7p \cdot \overline{p} &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\overline{\frac{1+z}{3-z}}\right) \\ &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\frac{1+\overline{z}}{3-\overline{z}}\right) \\ &= 7\left\{\frac{1+(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}{9-3(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}\right\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

21. 복소수 $z = a + bi$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$(1+i+z)^2 < 0$ $\qquad z^2 = c + 4i$

이 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$(1+i+z)^2 < 0$ 에서 $1+i+z$ 는 순허수이다.

$z = a + bi$ 라면

$1+i+z = 1+i+a+bi = (1+a)+(1+b)i$

이것이 순허수이므로 $1+a = 0$, $a = -1$

$\therefore\ z = -1 + bi$

또한 $z^2 = c + 4i$ 에서 $(-1+bi)^2 = c + 4i$

$1 - 2bi - b^2 = c + 4i$

$\therefore\ -2b = 4$, $1 - b^2 = c$

$\therefore\ b = -2,\ c = -3$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = 14$

22. $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{8}$ 값을 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 1

④ 0 ⑤ -1

해설

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \Rightarrow \omega^3=1$

$(\omega^3)^3\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

23. $x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^4 - 3x^3 + 3x - 2$ 의 값은?

① $2+\sqrt{3}i$ ② $2-\sqrt{3}i$ ③ $3+\sqrt{3}i$
④ $-3+\sqrt{3}i$ ⑤ $3-\sqrt{3}i$

해설

$x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $2x = 1+\sqrt{3}i$, $2x-1 = \sqrt{3}i$
$4x^2 - 4x + 1 = -3$
$4x^2 - 4x + 4 = 0$
$x^2 - x + 1 = 0$
$x^4 - 3x^3 + 3x - 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나누면
$x^4 - 3x^3 + 3x - 2$
$= (x^2 - x + 1)(x^2 - 2x - 3) + 2x + 1$
$= 0 + 2x + 1$
$= 2 \times \frac{1+\sqrt{3}i}{2} + 1$
$= 2 + \sqrt{3}i$

24. $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$, $|a+b| > |c|$인 a, b, c에 대하여 $\sqrt{(a+b+c)^2} - |a+b| - \sqrt{c^2}$의 값은?

① $2a$　② $2b$　③ $-2c$　④ $-2a$　⑤ $-3b$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로, $a \le 0$, $b \le 0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$ 이므로, $b < 0$, $c \ge 0$

$|a+b| > |c|$ 이므로, $-(a+b) > 0$

$\therefore\ a+b+c < 0$

$$\begin{aligned}\therefore(\text{주어진 식}) &= |a+b+c| - |a+b| - |c| \\ &= -(a+b+c) + (a+b) - c \\ &= -2c\end{aligned}$$

25. $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$가 성립할 때,

$\sqrt{(y-x+1)^2} + \sqrt[3]{x^3 - y^3 - 3xy(x-y)} + |x|$를 간단히 하면?

① $x-1$　　② $-x+1$　　③ $2y-3x+1$

④ $3x-2y-1$　　⑤ $-3x-2y-1$

해설

$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ 일 때, $y \ge 0,\ x < 0$

(준식) $= |y-x+1| + \sqrt[3]{(x-y)^3} + |x|$

$= y-x+1+x-y-x = -x+1$