

1. 자연수 N 을 170 으로 나누면 몫이 2 이고 나머지가 R 이다. R 의 약수의 개수가 3 개일 때, N 은 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 6 개

해설

$N = 170 \times 2 + R$ 이고 R 의 약수가 3 개이므로,

R 은 170 보다 작은 수 중 약수가 3 개인 수이다.

약수가 3 개이려면 반드시 같은 수의 제곱이 포함되므로,

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169 중 약수가 3 개인

수는 4, 9, 25, 49, 121, 169 이다.

$\therefore N$ 의 개수 = 6 (개)

2. 130 을 나누어 몫이 7 이고 나머지가 4 인 수는?

① 15

② 16

③ 17

④ 18

⑤ 19

해설

나누는 수를 a 라 하면 $7 \times a + 4 = 130$, $7 \times a = 126$ 이므로
 $a = 18$ 이다.

3. 100 이하의 자연수 중 18의 배수의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

18, 36, 54, 72, 90 이므로 5개이다.

4. 옛날부터 우리나라에는 십간(☰☷)과 십이지(☰☷☷)를 이용하여 매 해에 이름을 붙였다. 십간과 십이지를 차례대로 짝지으면 다음과 같이 그 해의 이름을 만들 수 있다. 다음 표에서 알 수 있듯이 2010년은 경인년이다. 다음 중 경인년이 아닌 해는?

병	정	무	기	경	신	임	계
자	축	인	묘	진	사	오	미
병자	정축	무인	기묘	경진	신사	임오	계미
1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003

갑	을	병	정	무	기	경
신	유	술	해	자	축	인
갑신	을유	병술	정해	무자	기축	경인
2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010

- ① 1830 년 ② 1890 년 ③ 1950 년
 ④ 2070 년 ⑤ 2110 년

해설

십간(☰☷)의 10 가지와 십이지(☰☷☷)의 12 가지를 계속 돌아가면서 조합이 이루어지므로 같은 이름의 년도는 60 년 만에 한 번씩 돌아오게 된다. 따라서 2010 년이 경인년이면 1830 년, 1890 년, 1950 년, 2070 년도 경인년이다.

5. 600 을 자연수 x 로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다.
나누어야 할 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

600 을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$2 \overline{)600}$$

$$2 \overline{)300}$$

$$2 \overline{)150}$$

$$3 \overline{)75}$$

$$5 \overline{)25}$$

$$5$$

$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$ 이므로 $\frac{2^3 \times 3 \times 5^2}{x}$ 가 어떤 자연수의 제곱이
되기 위한 x 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 $2 \times 3 = 6$ 이다.

6. 80 에 어떤 자연수를 곱하여 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 곱할 수 있는 수 중에서 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$80 = 2^4 \times 5$$

곱해야 할 가장 작은 자연수는 5

7. $3^n(2^n + 2^{n+1})$ 의 약수의 개수가 30 개일 때, 자연수 n 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned} 3^n(2^n + 2^{n+1}) &= 3^n(2^n + 2 \times 2^n) \\ &= 3^n \times 3 \times 2^n \\ &= 3^{n+1} \times 2^n \end{aligned}$$

따라서 약수의 개수는 $(n+2)(n+1) = 30$ 이므로

$$n+2=6, n+1=5$$

$$\therefore n=4$$

8. 200 이하의 자연수 중에서 약수의 개수가 홀수인 수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 14 개

해설

약수의 개수가 홀수인 자연수는 제곱수이므로 $1^2, 2^2, \dots, 13^2, 14^2$ 의 14 개가 있다.

9. 자연수 a, b, c 에 대하여 $750a = 180b = c^2$ 이 성립할 때, c 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 150

해설

$750a = 2 \times 3 \times 5^3 \times a$, $180b = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times b$,
위 두 식이 가장 작은 c^2 의 형태가 되려면,
 $a = 2 \times 3 \times 5$, $b = 5^3$ 이어야 한다.

따라서,

$$c^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^4$$

$$\therefore c = 150$$

10. 60에 가장 작은 수 A 를 곱하여 어떤 자연수 B 의 제곱이 되게 하려고 한다. $A + B$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

$$60 \times A = B^2$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5 \text{ 이므로 } A = 3 \times 5 = 15$$

$$2^2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 = B^2$$

$$B = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

$$\therefore A + B = 45$$

11. $240 \times a = b^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 a, b 에 대하여 $b - a$ 의 값은?

① 45

② 60

③ 75

④ 90

⑤ 105

해설

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5 \text{ 이므로 } a = 3 \times 5$$

$$2^4 \times 3 \times 5 \times (3 \times 5) = 2^4 \times 3^2 \times 5^2, b = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$a = 15, b = 60$$

$$\therefore b - a = 45$$

12. 자연수 a, b, c 에 대하여 $12 \times a = 5 \times b = c^2$ 을 만족하는 c 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

12 를 소인수분해하면 $2^2 \times 3$ 이므로 $2^2 \times 3 \times a = 5 \times b = c^2$ 이다
 c 가 최소이므로 $a = 3 \times 5^2$, $b = 5 \times 2^2 \times 3^2$ 이어야 한다.

$$2^2 \times 3 \times (3 \times 5^2) = 5 \times (5 \times 2^2 \times 3^2) = (2 \times 3 \times 5)^2$$

따라서 c 의 최솟값은 30 이다

13. $96 \times m = n^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 m, n 에 대하여 $m + n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$96 = 2^5 \times 3 \text{ 이므로 } m = 2 \times 3$$

$$2^5 \times 3 \times (2 \times 3) = 2^6 \times 3^2, n = 2^3 \times 3 = 24$$

$$m = 6, n = 24$$

$$\therefore m + n = 30$$

14. 120 에 가능한 한 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 30$

▷ 정답 : $b = 60$

해설

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 이므로 곱할 수 있는 수는
 $2 \times 3 \times 5 \times (\text{자연수})^2$ 의 꼴이다.

$$\therefore a = 2 \times 3 \times 5 \times 1^2 = 30$$

$$\begin{aligned} 120 \times a &= 2^3 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5 \\ &= 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \\ &= (2^2 \times 3 \times 5)^2 \\ &= b^2 \end{aligned}$$

$$\therefore b = 60$$

15. $24 \times a = 90 \times b = c^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 c 의 값을 구하여라.
(단, a, b, c 는 모두 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

$$24 \times a = 90 \times b = c^2$$

$24 \times a$ 와 $90 \times b$ 가 어떤 수의 제곱수가 되어야 하므로 소인수분해를 해 보면

$$2^3 \times 3 \times a = 2 \times 3^2 \times 5 \times b$$

즉, c 는 24 과 90 의 공배수이므로 $2^3 \times 3^2 \times 5$ 의 배수이다.
그러므로 가장 작은 c^2 은 $2^4 \times 3^2 \times 5^2$ 이어야 한다.

$$\therefore c = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

16. 자연수 a, b, c 에 대하여 $12 \times a = 5 \times b = c^2$ 을 만족하는 c 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

12 를 소인수분해하면 $2^2 \times 3$ 이므로 $2^2 \times 3 \times a = 5 \times b = c^2$ 이다
 c 가 최소이므로 $a = 3 \times 5^2$, $b = 5 \times 2^2 \times 3^2$ 이어야 한다.

$$2^2 \times 3 \times (3 \times 5^2) = 5 \times (5 \times 2^2 \times 3^2) = (2 \times 3 \times 5)^2$$

따라서 c 의 최솟값은 30 이다

17. 다음 중 12 의 약수가 아닌 것은?

① 1

② 2

③ 4

④ 5

⑤ 12

해설

12 의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12 이다.

18. 24 를 어떤 자연수로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이 때 어떤 자연수는 모두 몇 개인가?

① 5 개

② 6 개

③ 7 개

④ 8 개

⑤ 9 개

해설

어떤 수를 나누어 떨어지게 하는 수를 그 어떤 수의 약수라 한다.
24의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24이다.

19. 다음 중 3의 배수인 것은?

① 124

② 263

③ 772

④ 305

⑤ 273

해설

3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이다.

⑤ $2 + 7 + 3 = 12$ 가 3의 배수이므로 273은 3의 배수이다.

20. 숫자 카드 1, 3, 5, 7, 9 중에서 3 장을 골라 세 자리 수를 만들 때, 만든 수 중 3의 배수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 24 개

해설

3의 배수는 각 자리 수를 모두 더한 값이 3의 배수이다.

1, 3, 5, 7, 9로 만든 세 수를 더하여 3의 배수의 되는 조합은,
(1, 3, 5), (1, 5, 9), (3, 5, 7), (5, 7, 9) 이다.

∴ 3의 배수의 개수 = $3 \times 2 \times 1 \times 4 = 24$ (개)

21. 7의 배수를 작은 순서부터 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 이라 할 때, $a_1 + a_{12} + a_{32} + a_{42} + a_{52} + a_{62}$ 의 일의 자리 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

7의 배수를 차례대로 나열해 보면,

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91,

→ 일의 자리의 수가 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0 으로 순환하는 것을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\therefore a_1 + a_{12} + a_{32} + a_{42} + a_{52} + a_{62} &= a_1 + a_2 + a_2 + a_2 + a_2 + a_2 = \\ &7 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 27\end{aligned}$$

따라서 일의 자리의 수는 7이다.

22. 다섯 자리의 수 5 142 은 2 의 배수이면서 3 의 배수이다.
 안에 알맞은 숫자를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 6

▷ 정답 : 9

해설

2 의 배수이면서 3 의 배수인 수는 50142, 53142, 56142, 59142 이다.

23. 792 를 소인수분해하면 $a^l \times b^m \times c^n$ 이다. $a < b < c$ 일 때, $a + b + c - l - m - n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$ 이므로

$$\therefore a + b + c - l - m - n = 2 + 3 + 11 - 3 - 2 - 1 = 10$$

24. 360 을 소인수분해하였을 때, 각 소인수의 지수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$2 \overline{) 360}$$

$$2 \overline{) 180}$$

$$2 \overline{) 90}$$

$$3 \overline{) 45}$$

$$3 \overline{) 15}$$

$$5$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$\therefore 3 + 2 + 1 = 6$$

25. 자연수 a, b, c 에 대하여 $5 \times a = 7 \times b = c^2$ 을 만족하는 c 의 값으로 가능하지 않은 것은?

① 35

② 70

③ 105

④ 140

⑤ 180

해설

$5 \times a = 7 \times b = c^2$ 에서

i) $a = 5 \times 7^2$, $b = 5^2 \times 7$ 일 때, $5 \times (5 \times 7^2) = 7 \times (5^2 \times 7) = (5 \times 7)^2 = 35^2$

ii) $a = 2^2 \times 5 \times 7^2$, $b = 2^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때, $5 \times (2^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (2^2 \times 5^2 \times 7) = (2 \times 5 \times 7)^2 = 70^2$

iii) $a = 3^2 \times 5 \times 7^2$, $b = 3^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때, $5 \times (3^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (3^2 \times 5^2 \times 7) = (3 \times 5 \times 7)^2 = 105^2$

iv) $a = 4^2 \times 5 \times 7^2$, $b = 4^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때, $5 \times (4^2 \times 5 \times 7^2) = 7 \times (4^2 \times 5^2 \times 7) = (4 \times 5 \times 7)^2 = 140^2$

따라서 c 의 값으로 가능한 것은 35, 70, 105, 140, ... 이다.

26. 자연수 $360 \times n$ 이 자연수의 제곱이 된다고 할 때, n 이 될 수 있는 것을 모두 구하시오. (단, n 은 160 미만의 자연수이다.)

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

▷ 정답 : 40

▷ 정답 : 90

해설

$360 \times n = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times n = m^2$ 이라 하면

가장 작은 n 은 2×5 이다.

따라서 n 이 될 수 있는 160 미만의 수는

$$2 \times 5 = 10$$

$$2 \times 5 \times 2^2 = 40$$

$$2 \times 5 \times 3^2 = 90$$

$\therefore 10, 40, 90$

27. 450을 588보다 작은 자연수 a 로 나누었더니 약수의 개수가 홀수인 자연수 b 가 되었다. 가능한 b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 260

해설

약수의 개수가 홀수인 수는 제곱수이므로

$$\frac{450}{a} = \frac{2 \times 3^2 \times 5^2}{a} = k^2 = b \text{라 하면}$$

a 는 2, 2×3^2 , 2×5^2 , $2 \times 3^2 \times 5^2$ 이 가능하다.

$$a = 2 \text{ 일 때, } b = 15^2 = 225$$

$$a = 2 \times 3^2 \text{ 일 때, } b = 5^2 = 25$$

$$a = 2 \times 5^2 \text{ 일 때, } b = 3^2 = 9$$

$$a = 2 \times 3^2 \times 5^2 \text{ 일 때, } b = 1^2 = 1 \therefore 225 + 25 + 9 + 1 = 260$$

28. 자연수 x, y 에 대하여 $\frac{2^2 \times 5}{x} = y^2$ 을 만족하는 x 의 값을 모두 구하면?

① 1, 4

② 4, 5

③ 5, 20

④ 4, 5, 20

⑤ 1, 2, 4, 5, 20

해설

$\frac{2^2 \times 5}{x} = y^2$ 을 만족하는 자연수 x 는 $5, 5 \times 2^2$ 이다.

29. 자연수 135 의 약수의 개수와 $3 \times 5^n \times a^m$ 의 약수의 개수가 같을 때,
 $n + m$ 의 값은? (단, m, n 은 자연수이고, $a \neq 3, 5$ 인 소수)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$135 = 3^3 \times 5$$

$$(\text{약수의 개수}) = 4 \times 2 = 8(\text{개})$$

$$(1 + 1) \times (n + 1) \times (m + 1) = 8, n = 1, m = 1$$

$$\text{그러므로 } n + m = 1 + 1 = 2$$

30. 자연수 240 과 $2^3 \times 5^n$ 의 약수의 개수가 같을 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$ 이므로

약수의 개수는 $(4 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 20$

$2^3 \times 5^n$ 의 약수의 개수는 $(3 + 1) \times (n + 1) = 20$

$\therefore n = 4$

31. $2 \times 3 \times \square$ 는 어떤 수를 소인수분해한 식이고 이 수는 약수의 개수가 8 개인 가장 작은 수이다. $\square$ 안에 알맞은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$2 \times 3 \times a^n$$

$$(1+1) \times (1+1) \times (n+1) = 8 \quad \therefore n = 1$$

2, 3 을 제외한 가장 작은 소수는 5 이므로 $5^1 = 5$

32. $n \times 5^2 \times 7^4$ 의 약수의 개수가 105 개일 때, n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

약수의 개수는 각 인수에 1 을 더한 값의 곱이므로,

$n = a^k$ 라 두면,

$$(k+1) \times 3 \times 5 = 105$$

$$\rightarrow k+1 = 7, k = 6$$

$$\therefore n \text{의 최솟값} = 2^6 = 64$$

33. 서로 다른 한 자리 소수 a, b, c 에 대하여 $a^l \times b^m \times c^n$ 으로 소인수분해되는 자연수 N 에 3 을 곱하였더니 약수의 개수가 2 배가 되었다. 이때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

a, b, c 중 3이 있는 경우

$a = 3$ 이라 하면

$$2(l+1)(m+1)(n+1) = (l+2)(m+1)(n+1)$$

$$2l+2 = l+2, l=0$$

l, m, n 은 1 이상인 자연수이므로 a, b, c 중에 3은 없다.

a, b, c 는 한 자리 소수 2, 3, 5, 7 중에서 3이 아니므로 2, 5, 7 이다.

$$\therefore 2 + 5 + 7 = 14$$

34. $2^3 \times \square$ 의 약수의 개수가 8 개일 때, 다음 중 $\square$ 안에 들어 갈 수 없는 수를 모두 고르면?

① 3

② 4

③ 7

④ 9

⑤ 16

해설

② $2^3 \times 4 = 2^3 \times 2^2 = 2^5$ 이므로 약수의 개수는 $5 + 1 = 6$ (개)이다.

④ $2^3 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ 이므로 약수의 개수는 $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$ (개)이다.

35. $3^{2009} - 2^{2009}$ 를 10 으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, \dots \rightarrow 4$ 번 거듭제곱을 할 때
마다 일의 자릿수는 1 이 된다.

$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, \dots \rightarrow 4$ 번 거듭제곱을 할 때
마다 일의 자릿수는 6 이 된다.

3^{2009} 의 일의 자릿수는 3 이고,

2^{2009} 의 일의 자릿수는 2 이므로,

$3^{2009} - 2^{2009}$ 의 일의 자릿수는 1 이 된다.

$\therefore 3^{2009} - 2^{2009}$ 를 10 으로 나누었을 때의 나머지는 1 이다.

36. 어떤 수를 13 으로 나누면 6 이 남는 수 중 200 에 가장 가까운 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 201

해설

어떤 수를 x 라 하고 몫을 k 라 하면 $x = 13 \times k + 6$ 이다.

$k = 15$ 일 때, $x = 13 \times 15 + 6 = 201$ 이고 $k = 16$ 일 때,
 $x = 13 \times 16 + 6 = 214$ 이다.

따라서 200 에 가장 가까운 수는 201 이다.

37. 어떤 수 A 를 8 로 나누었더니 몫이 9 이고, 나머지가 3 이었다. 어떤 수 A 는?

① 70

② 75

③ 80

④ 85

⑤ 90

해설

$$A = 8 \times 9 + 3 = 75$$

38. 두 자연수 x, y 가 있다. x 를 y 로 나누었더니 몫이 15 , 나머지가 2 이었다. 이때, x 를 5 로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x = y \times 15 + 2 = 5 \times y \times 3 + 2$ 이다.
따라서 나머지는 2 이다.