1. 등식 $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)(x+yi)=8-2i$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

$(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)(x+yi)=8-2i$ 에서 $4x+4yi=8-2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$4x=8$, $4y=-2$

$\therefore\ x=2,\ y=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ xy=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

2. $i+i^2+i^3+i^4+i^5$ 을 간단히 하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① i ② $-i$ ③ $1+i$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$i^2=-1,\ i^3=i^2\times i=-i,\ i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1,$

$i^5=i^4\times i=i$

$i+i^2+i^3+i^4+i^5$

$=i+(-1)+(-i)+1+i=i$

3. $\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 - i$ 의 켤레복소수를 각각 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라 할 때, $\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$ 의 값은?

① 0 ② 3 ③ $7 - 2i$ ④ $7 - i$ ⑤ $7 + i$

해설

$\alpha = 1 + i$, $\beta = 2 - i$ 에서 $\overline{\alpha} = 1 - i$, $\overline{\beta} = 2 + i$ 이므로

$\alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \overline{\alpha\beta}$

$= (1 + i)(1 - i) + (1 + i)(2 + i) + (1 - i)(2 - i) + (1 - i)(2 + i)$

$= (1 + 1) + (2 - 1 + 3i) + (2 - 1 - 3i) + (2 + 1 - i)$

$= 7 - i$

4. $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5}$를 계산하면?

① $\sqrt{15}$ ② $-\sqrt{15}$ ③ $\sqrt{15}i$

④ $-\sqrt{15}i$ ⑤ -15

해설

$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} = \sqrt{3}i \cdot \sqrt{5}i = -\sqrt{15}$

5. $i(x+2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 5

해설

$$i(x+2i)^2 = i(x^2+4ix-4) = x^2 i - 4x - 4i$$
$$= -4x + (x^2-4)i$$

실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.

$\therefore\ x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

6. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$

$=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$

순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분)$\neq 0$이어야 하므로

$x^2-x-2=0$, $x^2-3x+2\neq 0$

(i) $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $x^2-3x+2\neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2)\neq 0$

$\therefore\ x\neq 1$ 또는 $x\neq 2$

따라서 (i), (ii) 에 의하여 $x=-1$

7. $\dfrac{2-i}{2+i}+\dfrac{2+i}{2-i}$ 를 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① $\dfrac{6}{5}$ ② 2 ③ $\dfrac{8}{5}$ ④ $\dfrac{8}{3}$ ⑤ 3

해설

$$\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2-i)^2+(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}$$

$$=\frac{3+3}{5}=\frac{6}{5}$$

8. $x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $9x^2 - 6x + 5$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{3}$ 이므로

$3x = 1 + \sqrt{2}i$

$3x - 1 = \sqrt{2}i$

양변을 제곱하면 $9x^2 - 6x + 1 = -2$

$\therefore\ 9x^2 - 6x = -3$

$9x^2 - 6x + 5$ 에서 $9x^2 - 6x$ 가 -3 이므로 $-3 + 5 = 2$

9. 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}=13$, $z+\bar{z}=4$ 일 때, 복소수 z 는? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $2-2i$ ② $2\pm3i$ ③ $2\pm\sqrt{3}i$

④ $3\pm2i$ ⑤ $4\pm3i$

해설

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로

$z\bar{z}=13$, $z+\bar{z}=4$ 에서

$(a+bi)(a-bi)=13$, $(a+bi)+(a-bi)=4$

$a^2+b^2=13$, $2a=4$

$\therefore\ A=2,\ b=\pm3$

$z=2\pm3i$

10. $x = -2 - i$ 일 때, $x^2 + 4x + 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

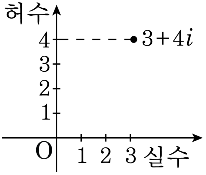
$x = -2 - i$ 에서 $x + 2 = -i$ 의 양변을 제곱하면

$(x+2)^2 = (-i)^2$ 이므로

$x^2 + 4x = -5$

$\therefore\ x^2 + 4x + 10 = -5 + 10 = 5$

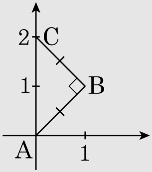
11. 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)를 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내어 좌표평면 위에 표시할 수 있다. 예를 들어 $3+4i$를 $(3,\ 4)$로 나타내면 다음 그림과 같이 표시할 수 있다. $z=1+i$일 때, 0, z, z^2 이 나타내는 점을 각각 A, B, C 라 할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인가? (단, 가장 정확하게 표시한 것을 하나만 고른다.)



① 정삼각형
② 이등변삼각형
③ 직각삼각형
④ 직각이등변삼각형
⑤ 답 없음

해설

$z = 1+i \quad z^2 = 2i \Rightarrow \quad B(1,\ 1),\ C(0,\ 2)$



$\Rightarrow$ 직각이등변삼각형

※ 이와 같이 복소수의 실수부와 허수부를 순서쌍으로 좌표평면에 나타내는 것을 복소평면이라 한다.

12. 복소수 $z=(1+i)x^2+x-(2+i)$가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -1 ② 1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 2

해설

복소수 z를 $a+bi$ (a, b는 실수) 의 꼴로 정리하면

$z=(x^2+x-2)+(x^2-1)i$

이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.

즉, $x^2-1=0$, $x=\pm 1$

한편, $x=1$이면 $z=0+0i=0$이므로

$z\neq 0$라는 조건에 맞지 않는다.

$\therefore\ x=-1$

13. 복소수 $(1+i)x^2-(2+i)x-3-2i$를 제곱하면 음의 실수가 된다고 할 때, 실수 x의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

(준식)$= x^2-2x-3+(x^2-x-2)i$
이것을 제곱해서 음의 실수가 되려면 순허수이어야 하므로
$x^2-2x-3=0\cdots$㉠, $x^2-x-2\neq 0\cdots$㉡
㉠에서 $x=3,\ x=-1$
이 중에서 ㉡를 만족하는 것은 $\therefore\ x=3$

14. 복소수 $(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 x의 값은?
(단, $i^2=-1$)

① -1 ② 1 ③ -3 ④ 3 ⑤ 7

해설

$(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$가 순허수이어야 하므로
$x^2+4x+3=0,\ x^2+2x-3\neq 0$
$(x+3)(x+1)=0,\ x=-1,\ x=-3$
$(x+3)(x-1)\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -3$
$\therefore\ x=-1$

15. $f(x)=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값은?

① $1-i$ ② 0 ③ $-1-i$

④ 2 ⑤ $1+i$

해설

$\dfrac{1+i}{1-i}=i$, $\dfrac{1-i}{1+i}=-i$ 이므로

$f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)$

$=f(i)+f(-i)$

$=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{100}+\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{100}$

$=(-i)^{100}+(i)^{100}=2$

※$i^4=1$ 이므로 $i^{4k}=1$

16. $f(x) = x^{2008} + x^{2010}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하면?

① $1+i$ ② $1-i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) &= f(-i) = (-i)^{2008} + (-i)^{2010} \\ &= ((-i)^4)^{502} + ((-i)^4)^{502} \cdot (-i)^2 \\ &= 1 + (-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

17. $i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+99i^{99}+100i^{100}$ 을 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 0 ② 5050 ③ $50+50i$

④ $50-50i$ ⑤ $-50+50i$

해설

$i^2=-1, i^3=-i, i^4=1, i^5=i, i^6=-1\cdots\cdots$

$i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+99i^{99}+100i^{100}$

$=i-2-3i+\cdots\cdots-99i+100$

$=(1-3)+(5-7)+\cdots+(97-99)\}\,i+$

$(-2+4)+(-6+8)+\cdots+(-98+100)\}$

$=(-2\times 25)i+(2\times 25)$

$=50-50i$

18. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, 다음 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$)

보기

㉠ $z+\bar{z}$ 는 실수이다.	㉡ $z\bar{z} > 0$
㉢ $z-\bar{z}$ 는 허수이다.	㉣ $z^2+\bar{z}^2 \geq 0$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z=a+bi,\ \bar{z}=a-bi,\ (a,\ b$ 는 실수$)$

㉠ $z+\bar{z}=2a$(실수)

㉡ $z\bar{z}=a^2+b^2>0$

㉢ $z-\bar{z}=2bi$, $b=0$ 일 경우에는 0 이다.
즉, z 가 실수부로만 이루어져 있는 경우에는 실수이다.
$ex)$ $z=3,\ \bar{z}=3,\ z-\bar{z}=3-3=0$

㉣ $z^2+\bar{z}^2=2(a^2-b^2) \rightarrow$ 우변이 0보다 크거나 같다고 할 수는 없다.

19. $\alpha = -2 + i$, $\beta = 1 - 2i$ 일 때 $\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}&\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}\\&= \alpha(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) + \beta(\overline{\alpha} + \overline{\beta})\\&= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta})\\&= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta})\\&= (-1 - i)(-1 + i)\\&= 2\end{aligned}$$

20. 복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 할 때, $(1+2i)z+5(1-\bar{z}i)=0$을 만족시키는 복소수 z는?

① $1+3i$　② $1-3i$　③ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$

④ $\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}i$　⑤ $\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}i$

해설

$z=a+bi$ $(a,\ b$ 는 실수$)$라 놓으면 $\bar{z}=a-bi$

따라서, 준식은 $(1+2i)(a+bi)+5\{1-(a-bi)i\}=0$

$\therefore\ a-7b+5+(b-3a)i=0$

그런데, $a,\ b$가 실수이므로

$a-7b+5=0,\ b-3a=0$

이들을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{4},\ b=\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ z=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}i$