

1. 방정식 $|x| + |x - 1| = 2$ 의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

i) $x < 0$ 일 때,
 $-x - (x - 1) = 2$ 이므로 $-2x + 1 = 2$
 $\therefore x = -\frac{1}{2}$
ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,
 $x - (x - 1) = 2$ 이므로 $0 \cdot x = 1$
 $\therefore$ 해가 없다.
iii) $1 \leq x$ 일 때,
 $x + x - 1 = 2$ 이므로 $2x = 3$
 $\therefore x = \frac{3}{2}$
(i), (ii), (iii) 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

2. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x - 4) = 4(x - 1)$
(2) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 6 = 0$

- ① (1) $\frac{4 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$ ② (1) $\frac{3 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$
③ (1) $\frac{4 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{6}i}{2}$ ④ (1) $\frac{1 \pm 2i}{5}$, (2) $\frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$
⑤ (1) $\frac{4 \pm 3i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.
(1) $x(5x - 4) = 4(x - 1)$
 $\therefore 5x^2 - 8x + 4 = 0$
 $\therefore x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{5} = \frac{4 \pm 2i}{5}$
(2) $x = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{18 - 24}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$

3. 이차방정식 $x^2 + 2(k - 1)x + 4 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 상수 k 값들의 합은?

① 1 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 2

해설

중근을 가지려면 판별식 $D = 0$

$$\frac{D}{4} = (k - 1)^2 - 4 = 0$$

$$k^2 - 2k - 3 = 0, (k - 3)(k + 1) = 0$$

$$\therefore k = 3, -1$$

4. 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 p 의 값을 모두 곱하면?

① -8

② -4

③ 1

④ 4

⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} D &= p^2 - 4(2p + 1) \\ &= p^2 - 8p - 4 = 0 \end{aligned}$$

판별식으로부터 나온 p 에 대한 방정식의 근들이 주어진 식이 중근을 갖게 하므로

실수 p 값들의 곱은 근과 계수의 관계에서 -4 이다.

5. x 에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2 + 2kx + k-1 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

(i) 이차방정식이므로 x^2 의 계수는 $k-1 \neq 0$ 이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} > 0$ 이어야

하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k-1)^2 > 0, \quad 2k-1 > 0$$

$$\therefore k > \frac{1}{2}$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 2이다.

6. 이차방정식 $x^2 - x(kx - 7) + 3 = 0$ 이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8 ② -4 ③ -2 ④ 5 ⑤ 2

해설

$x^2 - x(kx - 7) + 3 = 0$
 $x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$
 $(1 - k)x^2 + 7x + 3 = 0$
(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로
 x^2 의 계수는 $1 - k \neq 0$ 이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$
(ii) 주어진 이차방정식이
허근을 갖기 위해서는
판별식 $D < 0$ 이어야 하므로
 $D = 7^2 - 4 \cdot (1 - k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$
 $37 + 12k < 0$
 $\therefore k < -\frac{37}{12}$
따라서 최대정수는 -4 이다.

7. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a-m-1)x + a^2 - b + m^2 = 0$ 의 근이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b 값의 합은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4} = (a - m - 1)^2 - (a^2 - b + m^2) = 0$$

m 의 값에 관계없이

$$2(-a + 1)m + (-2a + b + 1) = 0$$

이어야 하므로

$$2(-a + 1) = 0, -2a + b + 1 = 0$$

$$\therefore a = 1, b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

8. 이차식 $ax^2 + 4x + 2a$ 가 x 에 대한 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a 의 값은?

① ± 1

② $\pm \sqrt{2}$

③ ± 2

④ $\pm \sqrt{3}$

⑤ $\pm \sqrt{5}$

해설

주어진 식이 x 에 대한 완전제곱식이 되려면

판별식 $D = 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 2^2 - a \cdot 2a = 0$$

$$4 - 2a^2 = 0, \quad a^2 = 2$$

$$\therefore a = \pm \sqrt{2}$$

9. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표가 6, b 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$ 의 그래프와

x 축과의 교점의 x 좌표는

이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$ 의 실근이다.

$x^2 - 8x + a = 0$ 에 $x = 6$ 을 대입하면

$36 - 48 + a = 0$ 에서 $a = 12$

따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$ 에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$

$x = 2$ 또는 $x = 6$

$\therefore b = 2 \therefore a + b = 14$

10. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 2

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$$

이 때, a, b 가 실수이므로 $a+2=0, b-1=0$

따라서 $a=-2, b=1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

11. 방정식 $(a^2 - 3)x - 1 = a(2x + 1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$(a^2 - 2a - 3)x = a + 1$$

$$(a - 3)(a + 1)x = a + 1$$

$\therefore a = 3$ 이면 해가 없다.

12. 다음 이차방정식을 풀면?

$$(1-i)x^2 + (1+i)x - 2 = 0$$

- ① $x = -1$ 또는 $x = -i$ ② $x = -1$ 또는 $x = -1-i$
③ $x = -1$ 또는 $x = -1+i$ ④ $x = 1$ 또는 $x = -1-i$
⑤ $x = 1$ 또는 $x = -1+i$

해설

x^2 의 계수를 실수로 만들기 위해 양변에 $1+i$ 를 곱하면

$$(1+i)(1-i)x^2 + (1+i)^2x - 2(1+i) = 0$$

$$2x^2 + 2ix - 2(1+i) = 0$$

$$(x-1)\{x+(1+i)\} = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = -1-i$$

13. 방정식 $\left[x + \frac{1}{2}\right]^2 - 3\left[x - \frac{1}{2}\right] - 7 = 0$ 의 해 $a \leq x < b$ 또는 $c \leq x < d$ 에 대하여 $a + b + c + d$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\left[x - \frac{1}{2}\right] = \left[x + \frac{1}{2}\right] - 1 \text{ 이므로}$$

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]^2 - 3\left[x + \frac{1}{2}\right] - 4 = 0$$

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = 4 \text{ 또는 } \left[x + \frac{1}{2}\right] = -1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{7}{2} \leq x < \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \text{ 이다}$$

따라서 구하는 값은

$$\therefore a + b + c + d = 6$$

14. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 1 \pm i$ 를 대입하여 정리하면
 $1 + 2i - 1 + a(1 + i) + b = 0$ 과
 $a + b + (a + 2)i = 0$ 이다.
위 식을 정리하면 $a + b = 0$ 과 $a + 2 = 0$ 에서
 $a = -2, b = 2$ 이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켈레복소수 근을 갖는다.
따라서 두 근은 $1 + i, 1 - i$
근과 계수의 관계에서
 $-a = (1 + i) + (1 - i) = 2 \quad \therefore a = -2$
 $b = (1 + i)(1 - i) = 2 \quad \therefore b = 2$

15. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta} \cdot \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 가지는 x 의 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로,
근과 계수와의 관계에 의해서

$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$ 이다.

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = (\alpha + \beta) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$= (\alpha + \beta) + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 3 + \frac{3}{1} = 6$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = 1 + 2 + 1 = 4$$

$\therefore \alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 가지는 x 의 이차방정식은

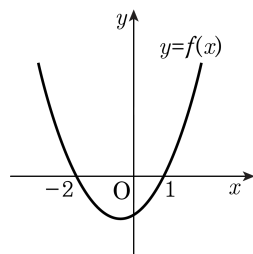
$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\therefore a = -6, b = 4$$

$$\therefore a + b = -2$$

16. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?

- ① -3 ② -2 ③ -1
 ④ 0 ⑤ 1



해설

$y = f(x+a)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y = f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y = f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

따라서, 방정식 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근이

$-2-a, 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$

$\therefore a = -3$

17. x 의 범위가 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 - 2x + a - 1$ 의 최소값이 1 이라 한다. 이 때, 이 함수의 최댓값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$y = x^2 - 2x + a - 1 = (x - 1)^2 + a - 2$$

정의역이 $-1 \leq x \leq 2$ 이므로

최솟값은 $x = 1$ 일 때 $a - 2$ 가된다.

이 때, 최솟값이 1 이므로

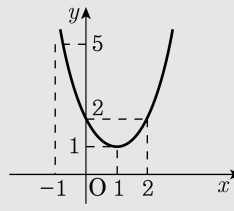
$$a - 2 = 1 \therefore a = 3$$

따라서 주어진 이차함수는 $y = (x - 1)^2 + 1$ 이고

그래프는 다음의 그림과 같으므로 최댓

값은

$x = -1$ 일 때 5 가 됨을 알 수 있다.



18. 이차함수 $y = -x^2 + 2ax - 6a$ 의 최댓값을 M 이라고 할 때, M 의 최솟값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$$y = -x^2 + 2ax + 6a = -(x - a)^2 + a^2 + 6a$$

$$\therefore M = a^2 + 6a = (a + 3)^2 - 9$$

따라서 M 의 최솟값은 -9 이다.

19. 함수 $y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) - 6$ 이 $x = m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) - 6$ 에서
 $x^2 + 4x + 5 = t$ 로 놓으면
 $y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x + 5) + 4$
 $= -t^2 - 2t + 4 = -(t + 1)^2 + 5$
그런데 $t = x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 \geq 1$ 이므로
 $t = 1$, 즉 $x = -2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.
따라서, $m = -2$, $M = 1$
 $\therefore M + m = -1$

20. 이차방정식 $x^2 + (a+1)x + a+1 = 0$ 의 두 실근 α, β 에 대하여 $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$ 의 값이 최소일 때, 상수 a 의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ 0 ⑤ 3

해설

$x^2 + (a+1)x + a+1 = 0$ 이 실근을 가지므로

$$D = (a+1)^2 - 4(a+1) \geq 0, \quad (a+1)(a-3) \geq 0$$

$\therefore a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -(a+1), \quad \alpha\beta = a+1$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta &= (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta \\ &= (a+1)^2 - (a+1) \\ &= a^2 + a = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

이때, $a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$ 이므로

$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$ 는 $a = -1$ 일 때 최솟값을 갖는다.

21. x, y 가 실수일 때, $-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12$ 의 최댓값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 = -(x+2)^2 - (y-3)^2 + 1$$

이 때, x, y 가 실수이므로

$$(x+2)^2 \geq 0, (y-3)^2 \geq 0$$

$$\therefore -x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 \leq 1$$

따라서 $x = -2, y = 3$ 일 때

주어진 식의 최댓값은 1 이다.

22. 실수 x 에 대하여 함수 $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3}$ 의 함수값 중 가장 작은 정수를 m , 가장 큰 정수를 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값은?

- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ 8
- ⑤ 9

해설

$\frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3} = y$ 라 놓고,
양변에 $x^2 + 2x + 3$ 을 곱하면
 $2x^2 - 4x + 1 = y(x^2 + 2x + 3)$
 $(y - 2)x^2 + 2(y + 2)x + 3y - 1 = 0$
 x 가 실수이므로
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (y + 2)^2 - (y - 2)(3y - 1) \geq 0$
 $2y^2 - 11y - 2 \leq 0$
 $\therefore \frac{11 - \sqrt{137}}{4} \leq y \leq \frac{11 + \sqrt{137}}{4}$
 $11 < \sqrt{137} < 12$ 이므로
 $-0. \times \times \times \leq y \leq 5. \times \times \times$
따라서 $m = 0, M = 5$ 이므로 $m + M = 5$

23. 지면으로부터 초속 20m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라고 하면, $h = 20t - 5t^2$ 인 관계식이 성립한다. 물체가 가장 높이 올라갔을 때 걸린 시간과 그때의 높이를 구하여라.

▶ 답: 초

▶ 답:

▶ 정답 : 2초

▶ 정답 : 20m

해설

$$h = 20t - 5t^2 = -5(t - 2)^2 + 20$$

따라서 $t = 2$ 일 때, 최댓값 20을 갖는다.

24. 이차방정식 $x^2 - (p + 4)x + q - 2 = 0$ 의 두 근의 차가 2가 되는 q 의 최솟값은 ?

- ① 5
- ② 4
- ③ 3
- ④ 2
- ⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2 - (p + 4)x + q - 2 = 0$ 의 두 근을 α , $\alpha + 2$ 라고 하면

$$|\alpha + 2 - \alpha| = \frac{\sqrt{(p + 4)^2 - 4(q - 2)}}{1} = |2|$$

$$\sqrt{p^2 + 8p + 16 - 4q + 8} = 2$$

양변을 제곱하여 q 에 관해 정리하면

$$4 = p^2 + 8p + 16 - 4q + 8, 4q = p^2 + 8p + 20$$

$$q = \frac{1}{4}p^2 + 2p + 5 = \frac{1}{4}(p + 4)^2 + 1$$

$\therefore p = -4$ 일 때 $q = 1$ 로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = p + 4, \alpha\beta = q - 2$$

두 근의 차가 2이므로

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = 2$$

$$\sqrt{(p + 4)^2 - 4(q - 2)} = 2$$

양변을 제곱하면

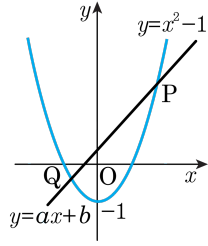
$$(p + 4)^2 - 4(q - 2) = 4$$

q 에 대해 정리하면

$$q = \frac{1}{4}(p + 4)^2 + 1$$

$\therefore p = -4$ 일 때 $q = 1$ 로 최솟값을 가진다.

25. 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 가 다음 그림과 같이 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x 의 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 의 한 교점 P의 x 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 $1 + \sqrt{2}$ 는 이차방정식 $x^2 - 1 = ax + b$ 의 근이다.

$$(1 + \sqrt{2})^2 - 1 = a(1 + \sqrt{2}) + b$$

$$2 + 2\sqrt{2} = a + b + a\sqrt{2}$$

a, b 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2 = a + b, \quad 2 = a$$

$$\therefore a = 2, \quad b = 0$$

26. 이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표가 -3 일 때, PQ 의 길이는? (단, k 는 상수)

- ① 5 ② $5\sqrt{2}$ ③ 7 ④ $7\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{5}$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와
직선 $y = x + k$ 가 두 점 P, Q 에서 만나므로
P, Q 의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 + 2x - 1 = x + k$
즉 $x^2 + x - 1 - k = 0 \cdots \textcircled{1}$ 의 두 실근과 같다.
점 P 의 x 좌표가 -3 이므로
 $\textcircled{1}$ 에 $x = -3$ 을 대입하면 $9 - 3 - 1 - k = 0$
 $\therefore k = 5$
 $k = 5$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2 + x - 6 = 0$
 $(x + 3)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$
따라서 점 Q 의 x 좌표는 2 이다.
두 점 P, Q 가 직선 $y = x + 5$ 위의 점이므로
 $P(-3, 2), Q(2, 7)$
 $\therefore \overline{PQ} = \sqrt{\{2 - (-3)\}^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{50}$
 $= 5\sqrt{2}$

27. $x + y = 3$ 일 때 $x - y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

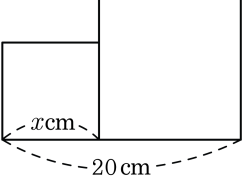
▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{13}{4}$

해설

$$\begin{aligned}x + y &= 3 \rightarrow y = -x + 3 \\x - y^2 &= x - (-x + 3)^2 \\&= x - (x^2 - 6x + 9) \\&= -x^2 + 7x - 9 \\&= -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}\end{aligned}$$

28. 다음 그림과 같이 길이가 20cm 인 선분을 두 부분으로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형 두 개를 만들려고 한다. 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.



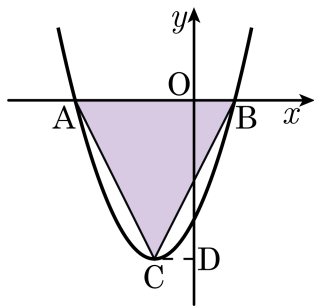
▶ 답 : cm

▷ 정답 : 10 cm

해설

작은 정사각형의 한 변의 길이를 x , 큰 정사각형의 한 변의 길이를 $20 - x$,
넓이를 y 라고 하면
$$y = x^2 + (20 - x)^2$$
$$= 2x^2 - 40x + 400$$
$$= 2(x - 10)^2 + 200$$
따라서 $x = 10$ 일 때, 최솟값 200 을 갖는다.

29. 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 A, 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$$y = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$$

$$C(-1, -4)$$

$$y = 0 \text{ 일 때 } x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$A(-3, 0), B(1, 0)$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

30. 어떤 수공예 업자가 만든 수공예품의 원가는 15000 원이다. 시장 조사를 하였더니 정가를 25000 원으로 하면 하루에 200 개를 팔 수 있고, 500원씩 정가를 내릴 때마다 20개씩 더 팔 수 있다고 한다. 최대 이윤을 얻으려면 정가를 얼마로 해야 하는가?
- ① 22500 원 ② 23000 원 ③ 23500 원
④ 24000 원 ⑤ 24500 원

해설

한 개의 이윤을 x 원이라 하면
팔리는 제품의 개수는
$$200 + \frac{10000 - x}{500} \times 20 = 600 - \frac{x}{25}$$
총 이윤을 p 라 하면
$$\begin{aligned} p &= x \left(600 - \frac{x}{25} \right) = -\frac{x^2}{25} + 600x \\ &= -\frac{1}{25}(x^2 - 15000x) \\ &= -\frac{1}{25}(x - 7500)^2 + 2250000 \end{aligned}$$
따라서 한 개의 이윤이 7500 원일 때,
최대 이윤을 얻을 수 있으므로 정가는
 $15000 + 7500 = 22500$ (원)

31. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + (m+1)x + (m^2-1) = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구하면? (단, m 은 실수이다.)

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$D = (m+1)^2 - 4(m^2-1) \geq 0, \quad 3m^2 - 2m - 5 \leq 0, \quad (3m-5)(m+1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq m \leq \frac{5}{3}$$

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -(m+1), \quad \alpha\beta = m^2 - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= \{-(m+1)\}^2 - 2(m^2 - 1) \end{aligned}$$

$$= -m^2 + 2m + 3 = -(m-1)^2 + 4$$

따라서, 구하는 최솟값은 0 ($m = -1$ 일 때)

32. x 의 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 2(k^2-1) = 0$ 의 두 근 중 적어도 하나가 양이 되기 위한 실수 k 의 최솟값을 구하면?

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

두 근을 α, β 라 하면
(i) 두 근이 모두 양수일 때
 $\alpha + \beta = -2(k-1) > 0, \alpha\beta = 2(k^2-1) > 0,$
 $\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 2(k^2-1) \geq 0$
이들의 공통 범위를 구하면
 $-3 \leq k < -1 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$
(ii) 한 근이 양수, 한 근이 음수일 때,
 $\alpha\beta = 2(k^2-1) < 0$
 $\therefore -1 < k < 1 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$
(iii) 한 근이 양수, 한 근이 0일 때
 $\alpha + \beta = -2(k-1) > 0, \alpha\beta = 2(k^2-1) = 0$
 $\therefore k = -1 \dots\dots \textcircled{\text{㉢}}$
구하는 k 의 범위는 $\textcircled{\text{㉠}}$ 또는 $\textcircled{\text{㉡}}$ 또는 $\textcircled{\text{㉢}}$ 이므로
 $-3 \leq k \leq 1$
 $\therefore$ 최솟값 -3

33. 함수 $y = x^2 - px$ 와 $y = -x^2 + px$ 의 그래프에 의하여 둘러싸인 부분에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값이 26 일 때, p 의 값을 구하여라. (단, $p > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

포물선의 축이 $x = \frac{p}{2}$ 이므로 직사각형은 직선 $x = \frac{p}{2}$ 에 대하여 대칭이다.

직사각형이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 $t \left(t > \frac{p}{2} \right)$ 라 하면

가로의 길이는 $2 \times \left(t - \frac{p}{2} \right) = 2t - p$,

세로의 길이는 $(-t^2 + pt) - (t^2 - pt) = -2t^2 + 2pt$

이므로 직사각형의 둘레의 길이는

$$2(-2t^2 + 2pt + 2t - p) = -4 \left(t - \frac{p+1}{2} \right)^2 + p^2 + 1 \text{ 이다.}$$

따라서 $t = \frac{p+1}{2}$ 일 때, 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 $p^2 + 1 = 26$ 이므로 $p = 5$ 이다.