**1.** 방정식 $|x|+|x-1|=2$의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 $-0.5$

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 $1.5$

**해설**

i ) $x<0$일 때,

$-x-(x-1)=2$이므로 $-2x+1=2$

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$

ii ) $0 \le x < 1$일 때,

$x-(x-1)=2$이므로 $0 \cdot x = 1$

$\therefore$ 해가 없다.

iii) $1 \le x$일 때,

$x+x-1=2$이므로 $2x=3$

$\therefore\ x=\frac{3}{2}$

( i ), ( ii ), (iii)에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

**2.** 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
(2) $x^2-3\sqrt{2}x+6=0$

① (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$ , (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
② (1) $\frac{3\pm 2i}{5}$ , (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
③ (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$ , (2) $\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{6}i}{2}$
④ (1) $\frac{1\pm 2i}{5}$ , (2) $\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
⑤ (1) $\frac{4\pm 3i}{5}$ , (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$

$\therefore\ 5x^2-8x+4=0$

$$\therefore\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{5}=\frac{4\pm 2i}{5}$$

(2) $x=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-24}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

**3.** 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 4 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 상수 $k$ 값들의 합은?

① $1$  ② $-2$  ③ $-1$  ④ $0$  ⑤ $2$

해설

중근을 가지려면 판별식 $D = 0$

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 4 = 0$$

$k^2 - 2k - 3 = 0$, $(k-3)(k+1) = 0$

$\therefore\ k = 3, -1$

**4.** 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 실수 $p$의 값을 모두 곱하면?

① $-8$ ② $-4$ ③ $1$ ④ $4$ ⑤ $8$

해설

$$D = p^2 - 4(2p+1)$$
$$= p^2 - 8p - 4 = 0$$

판별식으로부터 나온 $p$에 대한 방정식의 근들이 주어진 식이 중근을 갖게 하므로

실수 $p$ 값들의 곱은 근과 계수의 관계에서 $-4$이다.

**5.** $x$에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2+2kx+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 $k$의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

( i ) 이차방정식이므로 $x^2$의 계수는 $k-1 \neq 0$이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

( ii ) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} > 0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k-1)^2 > 0,\ 2k-1 > 0$$

$$\therefore k > \frac{1}{2}$$

따라서 자연수 $k$의 최솟값은 2이다.

**6.** 이차방정식 $x^2 - x(kx-7)+3=0$이 허근을 갖기 위한 최대 정수 $k$ 값은?

① $-8$ ② $-4$ ③ $-2$ ④ $5$ ⑤ $2$

해설

$x^2 - x(kx-7)+3=0$

$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$

$(1-k)x^2 + 7x + 3 = 0$

( i ) 주어진 방정식이 이차방정식이므로

$x^2$의 계수는 $1-k \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \neq 1$

( ii ) 주어진 이차방정식이

허근을 갖기 위해서는

판별식 $D<0$이어야 하므로

$D = 7^2 - 4\cdot(1-k)\cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$

$37 + 12k < 0$

$\therefore k < -\dfrac{37}{12}$

따라서 최대정수는 $-4$이다.

**7.** 계수가 실수인 $x$에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 $m$의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 $a, b$값의 합은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

해설

$$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$$

$m$의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

**8.** 이차식 $ax^2+4x+2a$가 $x$에 대한 완전제곱식이 되도록 하는 실수 $a$의 값은?

① $\pm 1$ ② $\pm\sqrt{2}$ ③ $\pm 2$ ④ $\pm\sqrt{3}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

주어진 식이 $x$에 대한 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=2^2-a\cdot 2a=0$$

$$4-2a^2=0,\ a^2=2$$

$$\therefore a=\pm\sqrt{2}$$

**9.** 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 $x$축과의 교점의 $x$좌표가 6, $b$일 때, $a + b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
$x$축과의 교점의 $x$좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2\ \therefore\ a + b = 14$

**10.** 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$의 그래프가 $x$축에 접할 때, $a^2 + b^2$의 값은? (단, $a, b$는 실수)

① 2　　② 5　　③ 8　　④ 10　　⑤ 13

**해설**

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$에서

$\dfrac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, $a, b$가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$이므로

$a^2 + b^2 = 5$

**11.** 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$의 해가 존재하지 않기 위한 $a$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$이면 해가 없다.

**12.** 다음 이차방정식을 풀면?

$$(1-i)x^2+(1+i)x-2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-i$

② $x=-1$ 또는 $x=-1-i$

③ $x=-1$ 또는 $x=-1+i$

④ $x=1$ 또는 $x=-1-i$

⑤ $x=1$ 또는 $x=-1+i$

해설

$x^2$ 의 계수를 실수로 만들기 위해 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)^2x-2(1+i)=0$

$2x^2+2ix-2(1+i)=0$

$(x-1)\left\{x+(1+i)\right\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1-i$

**13.** 방정식 $\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x-\frac{1}{2}\right]-7=0$의 해 $a \le x < b$ 또는 $c \le x < d$에 대하여 $a+b+c+d$의 값은? (단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대 정수)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\left[x-\frac{1}{2}\right]=\left[x+\frac{1}{2}\right]-1$이므로

$\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x+\frac{1}{2}\right]-4=0$

$\left[x+\frac{1}{2}\right]=4$또는 $\left[x+\frac{1}{2}\right]=-1$이므로

$\frac{7}{2}\le x<\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\le x<-\frac{1}{2}$이다

따라서 구하는 값은

$\therefore a+b+c+d=6$

**14.** $x$에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 $a, b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

▷ 정답 : $b=2$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=1\pm i$를 대입하여 정리하면
$1+2i-1+a(1+i)+b=0$과
$a+b+(a+2)i=0$이다.
위 식을 정리하면 $a+b=0$과 $a+2=0$에서
$a=-2, b=2$이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.
따라서 두 근은 $1+i,\ 1-i$
근과 계수의 관계에서
$-a=(1+i)+(1-i)=2 \qquad \therefore a=-2$
$b=(1+i)(1-i)=2 \qquad \therefore b=2$

**15.** 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 $\alpha,\beta$라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 가지는 $x$의 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$이다. $a+b$의 값을 구하면?

① 2　② 1　③ −1　④ −2　⑤ −3

해설

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로,
근과 계수와의 관계에 의해서
$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$이다.

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3+\frac{3}{1}=6$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}=1+2+1=4$$

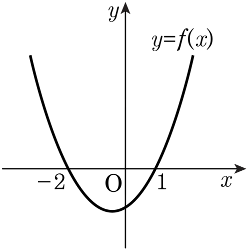
$\therefore\ \alpha+\frac{1}{\beta},\ \beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 가지는 $x$의 이차방정식은

$x^2-6x+4=0$

$\therefore\ a=-6,\ b=4$

$\therefore\ a+b=-2$

**16.** 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a)=0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 $a$ 의 값은?




① $-3$　② $-2$　③ $-1$

④ $0$　⑤ $1$

해설

$y=f(x+a)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 $x$ 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y=f(x)$ 이 그래프가
$x$ 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로
$y=f(x+a)$ 의 그래프가
$x$ 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$
따라서, 방정식 $f(x+a)=0$ 의 두 실근이
$-2-a,\ 1-a$ 이고
그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$
$\therefore a=-3$

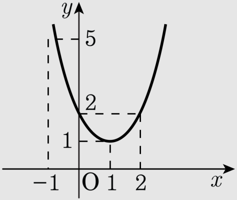
**17.** $x$의 범위가 $-1 \le x \le 2$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 - 2x + a - 1$ 의 최소값이 1 이라 한다. 이 때, 이 함수의 최댓값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$y = x^2 - 2x + a - 1 = (x-1)^2 + a - 2$
정의역이 $-1 \le x \le 2$ 이므로
최솟값은 $x = 1$ 일 때 $a - 2$ 가된다.
이 때, 최솟값이 1 이므로
$a - 2 = 1 \therefore a = 3$
따라서 주어진 이차함수는 $y = (x-1)^2 + 1$ 이고

그래프는 다음의 그림과 같으므로 최댓값은
$x = -1$ 일 때 5 가 됨을 알 수 있다.



**18.** 이차함수 $y = -x^2 + 2ax - 6a$ 의 최댓값을 $M$이라고 할 때, $M$의 최솟값을 구하여라. (단, $a$는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : $-9$

해설

$y = -x^2 + 2ax + 6a = -(x-a)^2 + a^2 + 6a$

$\therefore M = a^2 + 6a = (a+3)^2 - 9$

따라서 $M$의 최솟값은 $-9$ 이다.

**19.** 함수 $y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 이 $x=m$ 에서 최댓값 $M$ 을 갖는다. 이 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-1$

해설

$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 에서
$x^2+4x+5=t$ 로 놓으면
$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x+5\right)+4$
$=-t^2-2t+4=-(t+1)^2+5$
그런데 $t=x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1$ 이므로
$t=1$, 즉 $x=-2$ 일 때 최댓값 $1$ 을 갖는다.
따라서, $m=-2,\ M=1$
$\therefore M+m=-1$

**20.** 이차방정식 $x^2+(a+1)x+a+1=0$의 두 실근 $\alpha,\beta$에 대하여 $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$의 값이 최소일 때, 상수 $a$의 값은?

① $-1$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $0$ ⑤ $3$

해설

$x^2+(a+1)x+a+1=0$이 실근을 가지므로

$D=(a+1)^2-4(a+1)\ge 0,\ \ (a+1)(a-3)\ge 0$

$\therefore a\le -1$ 또는 $a\ge 3$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(a+1),\ \ \alpha\beta=a+1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta &= (\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\\ &=(a+1)^2-(a+1)\\ &=a^2+a=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

이때, $a\le -1$ 또는 $a\ge 3$ 이므로

$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$ 는 $a=-1$일 때 최솟값을 갖는다.

**21.** $x, y$가 실수일 때, $-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12$의 최댓값은?

① $-2$  ② $-1$  ③ $0$  ④ $1$  ⑤ $2$

해설

$-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 = -(x+2)^2 - (y-3)^2 + 1$

이 때, $x, y$가 실수이므로

$(x+2)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0$

$\therefore -x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 \leq 1$

따라서 $x = -2,\ y = 3$일 때

주어진 식의 최댓값은 $1$이다.

**22.** 실수 $x$ 에 대하여 함수 $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3}$ 의 함수값 중 가장 작은 정수를 $m$, 가장 큰 정수를 $M$이라 할 때, $m + M$의 값은?

① 4  ② 5  ③ 6  ④ 8  ⑤ 9

해설

$\dfrac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3} = y$라 놓고,

양변에 $x^2 + 2x + 3$을 곱하면

$2x^2 - 4x + 1 = y(x^2 + 2x + 3)$

$(y - 2)x^2 + 2(y + 2)x + 3y - 1 = 0$

$x$가 실수이므로

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4} = (y + 2)^2 - (y - 2)(3y - 1) \geq 0$

$2y^2 - 11y - 2 \leq 0$

$\therefore \dfrac{11 - \sqrt{137}}{4} \leq y \leq \dfrac{11 + \sqrt{137}}{4}$

$11 < \sqrt{137} < 12$이므로

$-0.\times\times\times \leq y \leq 5.\times\times\times$

따라서 $m = 0, M = 5$이므로 $m + M = 5$

**23.** 지면으로부터 초속 20m 로 쏘아 올린 물체의 $t$ 초 후의 높이를 $h$m 라고 하면, $h = 20t - 5t^2$ 인 관계식이 성립한다. 물체가 가장 높이 올라갔을 때 걸린 시간과 그때의 높이를 구하여라.

▶ 답: ____ 초

▶ 답: ____ m

▷ 정답: 2 초

▷ 정답: 20 m

해설

$h = 20t - 5t^2 = -5(t-2)^2 + 20$
따라서 $t = 2$ 일 때, 최댓값 20을 갖는다.

**24.** 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 $q$의 최솟값은 ?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 $\alpha$, $\alpha+2$라고 하면

$$|\alpha+2-\alpha| = \frac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1} = |2|$$

$$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8}=2$$

양변을 제곱하여 $q$에 관해 정리하면

$4=p^2+8p+16-4q+8$, $4q=p^2+8p+20$

$$q=\frac{1}{4}p^2+2p+5=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 $\alpha,\beta$라 하면

$\alpha+\beta=p+4, \alpha\beta=q-2$

두 근의 차가 2이므로

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2$$

$$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}=2$$

양변을 제곱하면

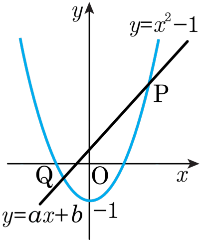
$$(p+4)^2-4(q-2)=4$$

$q$에 대해 정리하면

$$q=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

**25.** 이차함수 $y=x^2-1$ 의 그래프와 직선 $y=ax+b$ 가 다음 그림과 같이 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 $x$의 좌표가 $1+\sqrt{2}$일 때, $2a+b$의 값을 구하여라. (단, $a$, $b$ 는 유리수이다.)




▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y=x^2-1$ 의 그래프와 직선 $y=ax+b$ 의 한 교점 $P$ 의 $x$ 좌표가 $1+\sqrt{2}$ 이므로 $1+\sqrt{2}$ 는 이차방정식 $x^2-1=ax+b$ 의 근이다.

$\left(1+\sqrt{2}\right)^2-1=a\left(1+\sqrt{2}\right)+b$

$2+2\sqrt{2}=a+b+a\sqrt{2}$

$a$, $b$ 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$2=a+b$, $2=a$

$\therefore a=2$, $b=0$

**26.** 이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 $P$ 의 $x$ 좌표가 $-3$ 일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 길이는? (단, $k$ 는 상수)

① 5 ② $5\sqrt{2}$ ③ 7 ④ $7\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{5}$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와
직선 $y = x + k$ 가 두 점 P, Q 에서 만나므로
P, Q 의 $x$ 좌표는 이차방정식 $x^2 + 2x - 1 = x + k$
즉 $x^2 + x - 1 - k = 0 \cdots$ ㉠ 의 두 실근과 같다.
점 P 의 $x$좌표가 $-3$이므로
㉠에 $x = -3$을 대입하면 $9 - 3 - 1 - k = 0$
$\therefore\ k = 5$
$k = 5$ 를 ㉠에 대입하면 $x^2 + x - 6 = 0$
$(x+3)(x-2) = 0$
$\therefore\ x = -3$ 또는 $x = 2$
따라서 점 Q 의 $x$ 좌표는 2 이다.
두 점 P, Q가 직선 $y = x + 5$ 위의 점이므로
$P(-3,\ 2),\ Q(2, 7)$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\{2-(-3)\}^2 + (7-2)^2} = \sqrt{50}$$
$$= 5\sqrt{2}$$

**27.** $x+y=3$ 일 때 $x-y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

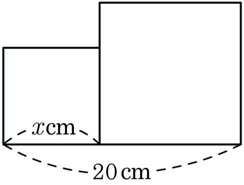
▷ 정답 : $\frac{13}{4}$

해설

$x+y=3 \to y=-x+3$

$$\begin{aligned} x-y^2 &= x-(-x+3)^2 \\ &= x-(x^2-6x+9) \\ &= -x^2+7x-9 \\ &= -\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{13}{4} \end{aligned}$$

**28.** 다음 그림과 같이 길이가 20cm 인 선분을 두 부분으로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형 두 개를 만들려고 한다. 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.




▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 10 cm

해설

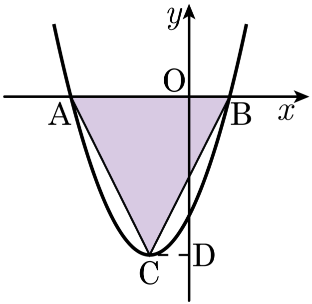
작은 정사각형의 한 변의 길이를 $x$ , 큰 정사각형의 한 변의 길이를 $20 - x$ ,

넓이를 $y$ 라고 하면

$$y = x^2 + (20 - x)^2$$
$$= 2x^2 - 40x + 400$$
$$= 2(x - 10)^2 + 200$$

따라서 $x = 10$ 일 때, 최솟값 200 을 갖는다.

**29.** 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 $x$축과 만나는 점을 A ,꼭짓점을 C 라 할 때, △ABC 의 넓이는?




① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$

$\mathrm{C}(-1, -4)$

$y = 0$ 일 때 $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$ 이므로

$\mathrm{A}(-3, 0)$ , $\mathrm{B}(1, 0)$

$\therefore \triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

**30.** 어떤 수공예 업자가 만든 수공예품의 원가는 15000 원이다. 시장 조사를 하였더니 정가를 25000 원으로 하면 하루에 200 개를 팔 수 있고, 500 원씩 정가를 내릴 때마다 20 개씩 더 팔 수 있다고 한다. 최대 이윤을 얻으려면 정가를 얼마로 해야 하는가?

① 22500 원 ② 23000 원 ③ 23500 원

④ 24000 원 ⑤ 24500 원

해설

한 개의 이윤을 $x$원이라 하면

팔리는 제품의 개수는

$$200+\frac{10000-x}{500}\times 20=600-\frac{x}{25}$$

총 이윤을 $p$라 하면

$$p=x\left(600-\frac{x}{25}\right)=-\frac{x^2}{25}+600x$$

$$=-\frac{1}{25}(x^2-15000x)$$

$$=-\frac{1}{25}(x-7500)^2+2250000$$

따라서 한 개의 이윤이 7500 원일 때,

최대 이윤을 얻을 수 있으므로 정가는

$15000+7500=22500$(원)

**31.** $x$에 관한 이차방정식 $x^2+(m+1)x+(m^2-1)=0$이 실근 $\alpha, \beta$를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하면? (단, $m$은 실수이다.)

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$D=(m+1)^2-4(m^2-1)\ge 0,\ 3m^2-2m-5\le 0,\ (3m-5)(m+1)\le 0$

$\therefore\ -1\le m\le \dfrac{5}{3}$

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-(m+1),\ \alpha\beta=m^2-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=\{-(m+1)\}^2-2(m^2-1)$

$=-m^2+2m+3=-(m-1)^2+4$

따라서, 구하는 최솟값은 0 ($m=-1$일 때)

**32.** $x$의 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+2(k^2-1)=0$의 두 근 중 적어도 하나가 양이 되기 위한 실수 $k$의 최솟값을 구하면?

① $-5$ ② $-4$ ③ $-3$ ④ $-2$ ⑤ $-1$

해설

두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면

( i ) 두 근이 모두 양수일 때

$\alpha+\beta=-2(k-1)>0,\ \alpha\beta=2(k^2-1)>0,$

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-2(k^2-1)\geq 0$

이들의 공통 범위를 구하면

$-3\leq k<-1\cdots\cdots$ ㉠

( ii ) 한 근이 양수, 한 근이 음수일 때,

$\alpha\beta=2(k^2-1)<0$

$\therefore\ -1<k<1\cdots\cdots$ ㉡

(iii) 한 근이 양수, 한 근이 0일 때

$\alpha+\beta=-2(k-1)>0,\ \alpha\beta=2(k^2-1)=0$

$\therefore\ k=-1\cdots\cdots$ ㉢

구하는 $k$의 범위는 ㉠ 또는 ㉡ 또는 ㉢이므로

$-3\leq k\leq 1$

$\therefore$ 최솟값 $-3$

**33.** 함수 $y = x^2 - px$ 와 $y = -x^2 + px$ 의 그래프에 의하여 둘러싸인 부분에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값이 26 일 때, $p$ 의 값을 구하여라. (단, $p > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

포물선의 축이 $x = \dfrac{p}{2}$ 이므로 직사각형은 직선 $x = \dfrac{p}{2}$ 에 대하여 대칭이다.

직사각형이 $x$ 축과 만나는 점의 $x$ 좌표를 $t\left(t > \dfrac{p}{2}\right)$ 라 하면

가로의 길이는 $2 \times \left(t - \dfrac{p}{2}\right) = 2t - p$,

세로의 길이는 $(-t^2 + pt) - (t^2 - pt) = -2t^2 + 2pt$

이므로 직사각형의 둘레의 길이는

$2(-2t^2 + 2pt + 2t - p) = -4\left(t - \dfrac{p+1}{2}\right)^2 + p^2 + 1$ 이다.

따라서 $t = \dfrac{p+1}{2}$ 일 때, 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은

$p^2 + 1 = 26$ 이므로 $p = 5$ 이다.