1. $(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$ 가 순허수일 때, x 의 값은?

① 0　　② 1　　③ -3　　④ 1, 3　　⑤ -1

해설

$(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$
$=x^2+x^2i+2x+4xi-3+3i$
$=(x^2+2x-3)+(x^2+4x+3)i$
순허수를 만족하려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$이어야 한다.
$x^2+2x-3=0$이면서, $x^2+4x+3\neq 0$인 x값을 찾아야 한다.
$\therefore x=1$

2. $(1+i)x^2+(1-i)x-6-2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2+x-6)+(x^2-x-2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$ 이어야 하므로 $x=-3$ 또는 $x=2$ 이다.
그런데 $x^2-x-2\neq 0$ 이어야 하므로 $x\neq 2$
따라서 $x=-3$

3. 등식 $\dfrac{a}{1+i}+\dfrac{b}{1-i}=-5$를 만족하는 두 실수 $a+b$의 값을 구하시오 (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$를 곱하면

$a(1-i)+b(1+i)=-10$, $(a+b)+(b-a)i=-10$

$\therefore a+b=-10,\ b-a=0$

4. $x = 1 + 2i$, $y = \dfrac{1+2i}{1-i}$, $z = \dfrac{1-2i}{1-i}$ 일 때,$xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1+3i$　　② $-1-2i$　　③ $-1+2i$

④ $-1-i$　　⑤ $-1+i$

해설

$x = 1+2i,\ y = \dfrac{1+2i}{1-i},\ z = \dfrac{1-2i}{1-i}$

$$\begin{aligned} \therefore\ xy + xz &= \frac{(1+2i)^2}{1-i} + \frac{(1-2i)(1+2i)}{1-i} \\ &= \frac{-3+4i+5}{1-i} \\ &= \frac{2+4i}{1-i} \\ &= -1+3i \end{aligned}$$

5. $\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}$ 를 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① $\frac{6}{5}$　　② 2　　③ $\frac{8}{5}$　　④ $\frac{8}{3}$　　⑤ 3

해설

$$\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2-i)^2+(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}$$
$$=\frac{3+3}{5}=\frac{6}{5}$$

6. $(1+i)^{10}$ 의 값은?

① $10-i$ ② $4i$ ③ $8i$ ④ $16i$ ⑤ $32i$

해설

$$\begin{aligned}(1+i)^{10} &= \left\{(1+i)^2\right\}^5 = (1+2i+i^2)^5 \\ &= (2i)^5 = 2^5 \cdot i^5 = 32i\end{aligned}$$

7. $z = \dfrac{2}{1-i}$ 일 때, $2z^2 - 4z - 1$ 의 값을 구하면?

① -1　② 2　③ -3　④ 4　⑤ -5

해설

$z = \dfrac{2}{1-i} = 1 + i$

$$\begin{aligned} \therefore\ 2z^2 - 4z - 1 &= 2(1+i)^2 - 4(1+i) - 1 \\ &= 4i - 4 - 4i - 1 \\ &= \ -5 \end{aligned}$$

해설

$z = 1 + i, z - 1 = i$

양변을 제곱하고 정리하면

$z^2 - 2z = -2$

$2z^2 - 4z - 1$

$= 2(z^2 - 2)z - 1$

$= -4 - 1 = -5$

8. $x = 1998,\ y = 4331$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ i　　⑤ $-i$

해설

$\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$

$= \dfrac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$

$= \dfrac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{(y-xi)(x+yi)} = 0$

9. $z=1-i$ 일 때, $\dfrac{\overline{z}-1}{z}-\dfrac{z-1}{\overline{z}}$ 의 값은?

① $-i$ ② i ③ $-2i$ ④ $2i$ ⑤ 1

해설

$z=1-i, \overline{z}=1+i$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{i}{1-i}-\dfrac{-i}{1+i}=\dfrac{2i}{2}=i$

10. 복소수 $z = i(a + \sqrt{5}i)^2$ 이 $z = \bar{z}$ 가 되도록 실수 a 의 값을 구하면?

① 5 ② $\sqrt{5}$ ③ 0 ④ ± 5 ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

$z = i(a^2 - 5 + 2a\sqrt{5}i)$
$= -2a\sqrt{5} + (a^2 - 5)i$
$z = \bar{z}$ 이면 실수이므로 허수부분이 0이다.
$\therefore\ a = \pm\sqrt{5}$

11. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = -\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = 3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = 6$

① ㉠,㉡ ② ㉢,㉣ ③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥ ⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = -\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} = -3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = \dfrac{4}{2i} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2}i \times \sqrt{5} = \sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = \sqrt{9} + (\sqrt{3}i)^2 = 0$

12. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2의 제곱근은 $\sqrt{2}i$와 $-\sqrt{2}i$이다.

② $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\dfrac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16}=-4i$

해설

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

13. 복소수 $z = x + yi$를 좌표평면 위에 점 $p(x,\ y)$에 대응시킬 때, $(3-4i)z$가 실수가 되게 하는 점 p의 자취가 나타내는 도형은?

① 기울기가 양인 직선　　② 기울기가 음인 직선
③ 위로 볼록한 포물선　　④ 아래로 볼록한 포물선
⑤ 원

해설

$$(3-4i)z = (3-4i)(x+yi)$$
$$= (3x+4y) + (-4x+3y)i$$

실수가 되려면 허수부 $-4x+3y=0$이다.

$\therefore y = \frac{4}{3}x$ ($\Rightarrow$ 기울기가 양인 직선)

14. 복소수 $(1-xi)(1-i)$가 순허수가 되도록 실수 x의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

$(1-xi)(1-i) = (1-x) + (-1-x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1-x=0$,
$x = 1$

15. 복소수 $z=(1+i)x^2+(5+2i)x+3(2-i)$ 에서 z가 순허수일 때, 실수 x의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$z=(x^2+5x+6)+(x^2+2x-3)i$

$\quad=(x+2)(x+3)+(x-1)(x+3)i$

순허수가 되려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$

$\therefore\ x=-2$

16. $i^2 = -1$ 일 때, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 n 의 개수는?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$(n+i)^4 = \left\{(n+i)^2\right\}^2 = (n^2-1+2ni)^2$
이것이 정수가 되려면 $n^2-1+2ni$ 가 정수가 되거나 순허수가 되어야 한다.
i) $n=0$ 일 때 성립
ii) $n^2-1=0$, $n=\pm1$ 일 때 성립
따라서 구하는 정수의 개수는 3 개

해설

$(n+i)^4 = n^4-6n^2+1+i(4n^3-4n)$
이것이 실수이려면, $4n^3-4n=0$, $n=0$, ±1
이 때 $(n+i)^4$ 은 모두 정수가 되므로, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 n 의 개수는 3 개다.

17. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값은?

① $1-i$　　② 0　　③ $-1-i$
④ 2　　⑤ $1+i$

해설

$\frac{1+i}{1-i} = i$, $\frac{1-i}{1+i} = -i$ 이므로

$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$

$= f(i) + f(-i)$

$= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}$

$= (-i)^{100} + (i)^{100} = 2$

※$i^4 = 1$ 이므로 $i^{4k} = 1$

18. $f(x) = \dfrac{x}{1-i}$, $g(x) = \dfrac{x}{1+i}$ 인 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $\{f(1+i)\}^{2006} + \{g(1-i)\}^{2007}$ 의 값은?

① -2 ② $-1+i$ ③ -1

④ $-1-i$ ⑤ 2

해설

$f(1+i) = \dfrac{1+i}{1-i} = i$

$g(1-i) = \dfrac{1-i}{1+i} = -i$

$\therefore$ (준식) $= (i)^{2006} + (-i)^{2007}$

$= i^2 + (-i)^3 \; (\because i^{2004} = (-i)^{2004} = 1)$

$= -1 + i$

19. $z = \frac{1-i}{1+i}$ 일 때, $z^{100} + \frac{1}{z^{100}}$ 의 값을 구하여라.$(i = \sqrt{-1})$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$z = \frac{1-i}{1+i} = -i$

$z^{100} + \frac{1}{z^{100}} = (-i)^{100} + \frac{1}{(-i)^{100}} = 1 + 1 = 2$

20. $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{29} + i^{30}$ 을 계산하면?

① $i - 1$ ② $1 - 2i$ ③ $3i - 1$ ④ $2 - 3i$ ⑤ $i + 3$

해설

$i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$

$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$

$$\begin{aligned} \therefore i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{29} + i^{30} &= i^{29} + i^{30} \\ &= i + i^2 \\ &= i - 1 \end{aligned}$$

21. $\alpha = 1 + i,\ \beta = 1 - i$ 일 때, $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ 의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = 2$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} &= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} \\ &= \frac{8 - 12}{2} \\ &= -2\end{aligned}$$

22. 복소수 $\alpha = 2 - i$, $\beta = -1 + 2i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 10 ⑤ 20

해설

$\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$
$= \overline{\alpha}(\alpha + \beta) + \overline{\beta}(\alpha + \beta)$
$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta})$
$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta})$
$= (1 + i)(1 - i)$
$= 2$

23. 복소수 z의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$ 를 만족시키는 복소수 z 는?

① 존재하지 않는다. ② 단 한 개 있다.

③ 두 개 뿐이다. ④ 세 개 뿐이다.

⑤ 무수히 많다.

해설

$z=a+bi$ 라 하면 $\bar{z}=a-bi$ (단, $a,\ b$ 는 실수)
$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$
$2a+2bi+3ai-3b+2a-2bi-3ai-3b=2$
$4a-6b=2 \qquad \therefore\ 2a-3b=1$
$2a-3b=1$ 을 만족하는 실수 $a,\ b$ 의 순서쌍은 무수히 많으므로 주어진 조건을 만족하는 복소수 z 는 무수히 많다.

24. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x 의 값으로 옳지 않은 것을 <u>모두</u> 고르면?

① 0　　② $\sqrt{3}$　　③ $-\sqrt{3}$　　④ 1　　⑤ -1

해설

$$\begin{aligned} i(x+i)^3 &= i(x^3+3x^2i-3x-i) \\ &= (-3x^2+1)+(x^3-3x)i \end{aligned}$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$

25. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은?

① 원

② 아래로 볼록한 포물선

③ 위로 볼록한 포물선

④ 기울기가 음인 직선

⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$\begin{aligned}(2-3i)z &= (2-3i)(a+bi) \\ &= (2a+3b)+(2b-3a)i\end{aligned}$$

$\therefore\ 2b-3a=0 \quad \therefore\ b=\frac{3}{2}a \Rightarrow$ 기울기가 양인 직선

26. α, β를 복소수라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$

② $\alpha+\beta i=r+\delta i$ 이면 $\alpha=r,\ \beta=\delta$

③ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$

④ $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$

⑤ $\alpha^2<0$

해설

① $\alpha=1,\ \beta=i$ 이면 $\alpha+\beta i=1+i^2=0$ 이지만 $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ 이다.

② $\alpha=1,\ \beta=1$ 이면 $\alpha+\beta i=1+i$ 이고, $r=2,\ \delta=-1+i$ 이면 $r+\delta i=1+i$ 에서 $\alpha+\beta i=r+\delta i$ 이지만 $\alpha\neq r,\ \beta\neq\delta$ 이다.

③ $\alpha=1,\ \beta=i$ 이면 $\alpha^2+\beta^2=1+i^2=0$ 이지만 $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ 이다.

④ $\alpha\neq 0$ 이고 $\beta\neq 0$ 이라 가정하고 $\alpha\beta=0$ 의 양변에 $\frac{1}{\alpha}$ 을 곱하면 $\beta=0$ 이 되어 모순이다. 따라서 $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ 이다.

⑤ $(\text{순허수})^2<0$ 이나 $\alpha=1+i$ 이면 $\alpha^2=(1+i)^2=2i$ 가 되어 양수도 음수도 아니다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

27. 복소수들 사이의 연산 $*$가 다음과 같다고 하자.
$\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$
이 때, $(1+2i) * z = 1$을 만족시키는 복소수 z는?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1+i$　　② $1-i$　　③ $-1+i$
④ $-1-i$　　⑤ i

해설

$z = a + bi$라 하면
$(1+2i) * z$
$= (1+2i) + (a+bi) + (1+2i)(a+bi)i$
$= (-a-b+1) + (a-b+2)i = 1$
$-a-b+1 = 1,\ a-b+2 = 0$
$a = -1,\ b = 1$
$\therefore\ z = -1+i$

28. 복소수 $z = a + bi,\ w = b + ai$ ($a,\ b$는 $ab \neq 0$ 인 실수, $i = \sqrt{-1}$)에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, $\overline{z},\ \overline{w}$ 는 각각 $z,\ w$ 의 켤레복소수이다.)

① $i\overline{z} = w$

② $\dfrac{\overline{w}}{\overline{z}} = \dfrac{z}{w}$

③ $z \cdot \overline{w} = \overline{z} \cdot w$

④ $z \cdot \overline{z} = w \cdot \overline{w}$

⑤ $i(\overline{z} + \overline{w}) = z + w$

해설

① : $i\overline{z} = i(a - bi) = b + ai = w$

② :①에서 $\overline{z} = -iw \quad \cdots\cdots$ ㉠

같은 방법으로 $\overline{w} = -iz \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 대입하면 $\dfrac{\overline{w}}{\overline{z}} = \dfrac{-iz}{-iw} = \dfrac{z}{w}$

③ :㉠, ㉡을 대입하면

(좌변) $= z \cdot (-iz) = -iz^2$,

(우변) $= (-iw) \cdot w = -iw^2$

∴ 좌변≠우변

④ : ②에서 $z \cdot \overline{z} = w \cdot \overline{w}$

⑤ : $i(\overline{z} + \overline{w}) = i\overline{z} + i\overline{w} = w + z = z + w$

29. 복소수 $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$
$=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$z^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$

$=\left(\dfrac{-3-3\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$

$+\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i-3+3\sqrt{3}i}{2}\right)^2$

$=(-2-\sqrt{3}i)^2+(-2+\sqrt{3}i)^2$

$=4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3=2$

해설

$z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$

$=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$

$=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z+1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1=-3$

$\to 4z^2+4z+4=0$

$\to z^2+z+1=0$

$\to (z-1)(z^2+z+1)=0$

$\to z^3-1=0$

$\to z^3=1$

※방정식에 익숙한 학생들은

$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2+z+1=0$ 와 $z^3=1$ 을 도출할 수 있을 것이다.

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$

$=10z^4+12z^3+10z^2$

$=(10z^4+10z^3+10z^2)+2z^3$

$=10z^2(z^2+z+1)+2z^3$

$=0+2$

$=2$

30. $a_1,\ a_2,\ \cdots a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1a_2\ \cdots\cdots\ a_{10}=1$ 일 때, $\sqrt{a_1}\,\sqrt{a_2}\cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음<보기>에서 모두 고르면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

보기

㉠ 1　　㉡ -1　　㉢ i　　㉣ $-i$

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$a_1a_2\ \cdots\cdots\ a_{10}=1$ 이면 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함)개 있다.

i) -1 이 $4k+2(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때
$\sqrt{a_1}\,\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$
$=\sqrt{a_1a_2\cdots a_{10}}\ i^{4k+2}=\sqrt{1}\cdot i^2=-1$

ii) -1 이 $4k(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때
$\sqrt{a_1}\,\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$
$=\sqrt{a_1a_2\cdots a_{10}}\ i^{4k}$
$=1$

i), ii) 에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.

31. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{50}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\frac{1+i}{1-i}=i,\ \frac{1-i}{1+i}=-i$

$\therefore$ (준식) $=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}$

$=(-i)^{50}+(i)^{50}$

$=(-i)^{2}+(i)^{2}$

$=-2$

32.

두 복소수 α, β 를 $\alpha = (3+4i)^{10} + (3-4i)^{10}$, $\beta = (3+4i)^{10} - (3-4i)^{10}$ 이라 할 때,α 는 (가) 이고, β 는(도) (나) 이다.

다음 중 (가), (나) 에 알맞은 것을 차례로 적으면?

① 양의 실수, 음의 실수
② 음의 실수, 양의 실수
③ 실수, 순허수
④ 순허수, 실수
⑤ 순허수, 순허수

해설

$\alpha = (3+4i)^{10} + (3-4i)^{10}$ 을 직접 계산하기는 어렵다.
따라서 $\overline{\alpha}$ 를 구하여 α 와 $\overline{\alpha}$ 의 관계를 살펴본다.

$$\begin{aligned}\overline{\alpha} &= \overline{(3+4i)^{10} + (3-4i)^{10}} \\ &= (\overline{3+4i})^{10} + (\overline{3-4i})^{10} \quad \Leftarrow \overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ &= (3-4i)^{10} + (3+4i)^{10} \quad \Leftarrow \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\ &= \alpha\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\alpha} = \alpha$ 이므로 α 는 실수이다.

$$\begin{aligned}\overline{\beta} &= \overline{(3+4i)^{10} - (3-4i)^{10}} \\ &= (\overline{3+4i})^{10} - (\overline{3-4i})^{10} \quad \Leftarrow \overline{z_1-z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \\ &= (3-4i)^{10} - (3+4i)^{10} \quad \Leftarrow \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \\ &= -\beta\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\beta} = -\beta$ 이므로 β 는 순허수이다.

33. 방정식 $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$를 만족시키는 복소수 z는? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

① 존재하지 않는다. ② 한 개 있다.

③ 두 개뿐이다. ④ 무수히 많이 있다.

⑤ 세 개뿐이다.

해설

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 놓으면,
$(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$에서
$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$
$2(2a-3b)=2$
$\therefore\ 2a-3b=1$을 만족하는 실수 a, b의 쌍은 무수히 많다.