

1. 24 를 어떤 자연수로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이때, 어떤 자연수는 모두 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

24 의 약수를 구하면 된다. 24 의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 이다. 따라서 8 개이다.

2. 36 을 어떤 자연수로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이때, 어떤 자연수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 9 개

해설

36의 약수를 구하면 된다. 36의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36이다. 따라서 9개이다.

3. 두 자연수 a, b 가 있다. a 를 b 로 나누었을 때의 몫이 9, 나머지가 8 이었다. a 를 3 으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$a = 9 \times b + 8 = 3 \times b \times 3 + 3 \times 2 + 2$ 이므로 나머지는 2 이다.

4. 어떤 수를 7로 나누었더니 몫이 5이고 나머지가 3이었다. 이 수를 9로 나누었을 때의 몫을 x , 나머지를 y 라 할 때, $x+y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

어떤 수를 A 라 하면 $A = 7 \times 5 + 3 = 9 \times 4 + 2$ 이므로 몫이 4, 나머지가 2이다.

따라서 $x + y = 4 + 2 = 6$ 이다.

5. 10 이하의 자연수 중 약수의 개수가 3개 이상인 수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

약수의 개수가 3 개 미만인 수는 1 과 소수이다.

10 이하의 소수는 2,3,5,7 4개이므로 약수의 개수가 3개 이상인 수는 $10 - 4 - 1 = 5$ 개이다.

6. $a + b = 60$ 을 만족하는 두 소수 a, b 를 $[a, b]$ 로 나타낼 때, $[a, b]$ 를 모두 구하여라. (단, $a < b$)

- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :

- ▷ 정답 : [7, 53]
- ▷ 정답 : [13, 47]
- ▷ 정답 : [17, 43]
- ▷ 정답 : [19, 41]
- ▷ 정답 : [23, 37]
- ▷ 정답 : [29, 31]

해설

에라토스테네스의 체를 이용하여 60 이하의 소수를 구해보면 다음과 같다.

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~
11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~
~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~
31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~ 37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~
41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~
~~51~~ ~~52~~ 53 ~~54~~ ~~55~~ ~~56~~ ~~57~~ ~~58~~ 59 ~~60~~

이 중 $a < b, a + b = 60$ 을 만족하는 a, b 를 찾아 $[a, b]$ 형태로 나타내면,
[7, 53], [13, 47], [17, 43], [19, 41], [23, 37], [29, 31] 이다.

7. 20 이하의 홀수 중에서 두 자리 소수를 모두 고른 것은?

- ① 11, 13, 17 ② 11, 13, 15, 17 ③ 11, 13, 15, 19
④ 11, 15, 17, 19 ⑤ 11, 13, 17, 19

해설

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19의 수 중에서
두 자리 소수는 11, 13, 17, 19 이다.

8. 20 이하의 자연수 중 약수의 개수가 2개인 수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

구하고자 하는 수는 20 이하의 소수이다.
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19로 총 8개이다.

9. 140 을 소인수분해하면 $2^a \times 5^b \times 7^c$ 일 때, 세 수 a, b, c 의 값을 각각 구하여라.
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▷ 정답 : $a = 2$
- ▷ 정답 : $b = 1$
- ▷ 정답 : $c = 1$

해설

140 을 소인수분해하면 $140 = 2^2 \times 5 \times 7$

10. $600 = a^x \times b^y \times c^z$ 로 소인수분해될 때, $(a + b + c) \times (x + y + z)$ 의 값은? (단, $a < b < c$)

① 12

② 24

③ 36

④ 48

⑤ 60

해설

$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2 = a^x \times b^y \times c^z$ 이므로

$a = 2, b = 3, c = 5, x = 3, y = 1, z = 2$

$\therefore (a + b + c) \times (x + y + z) = (2 + 3 + 5) \times (3 + 1 + 2) = 10 \times 6 = 60$

11. 792를 소인수분해하면 $a^l \times b^m \times c^n$ 이다. $a < b < c$ 일 때, $a + b + c - l - m - n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$ 이므로

$$\therefore a + b + c - l - m - n = 2 + 3 + 11 - 3 - 2 - 1 = 10$$

12. 1부터 200까지의 자연수를 모두 곱하면 $A \times (2 \times 5)^n$ 이 될 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 49

해설

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \cdots \times 200$ 에서 2의 배수의 개수 : 100,
 2^2 의 배수의 개수 : 50, 2^3 의 배수의 개수 : 25,
 2^4 의 배수의 개수 : 12, 2^5 의 배수의 개수 : 6,
 2^6 의 배수의 개수 : 40, 2^7 의 배수의 개수 : 1이고,
5의 배수의 개수 : 40, 5^2 의 배수의 개수 : 8,
 5^3 의 배수의 개수 : 1이므로

$$\begin{aligned} \therefore 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 200 \\ = 2^{197} \times 5^{49} \times \cdots = A \times (2 \times 5)^{49} \quad \therefore n = 49 \end{aligned}$$

13. 72를 x 로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되면서 3의 배수는 되지 않도록 할 때, 나눌 수 있는 가장 작은 자연수 x 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

$\frac{72}{x} = \frac{2^3 \times 3^2}{x}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 $x = 2, x = 2 \times 3^2, x = 2^3, x = 2^3 \times 3^2$ 이다.

3의 배수가 되지 않아야 하므로 $x = 2 \times 3^2, x = 2^3 \times 3^2$ 중 작은 자연수는 $x = 2 \times 3^2 = 18$ 이다.

14. 다음은 소희와 동우가 문제를 푼 것이다. 두 사람 중 누가 맞게 풀었는지 고르고, 그 이유를 써라.

문제

$2 \times 3 \times 5^2$ 에 적당한 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되도록 할 때, 곱할 수 있는 수중 가장 작은 수와 그때 어떤 수의 제곱이 되는지 차례대로 구하여라.

소희의 풀이과정

$2 \times 3 \times 5^2$ 를 계산하면 150이다.
그런데 어떤 자연수의 제곱이 되는 수는 1, 4, 9, 16, ... 등이 있다.
150 근처의 제곱수는 아마도 12가 될 것 같다.
 $12 \times 12 = 144$ 이므로 150이 되려면 150에 $\frac{150}{144}$ 를 곱하면 된다.
따라서 곱할 수 있는 수는 $\frac{150}{144}$ 이고, 12의 제곱이 된다.

동우이의 풀이과정

어떤 자연수의 제곱이 되는 수는 $2^2, 3^2, 4^2, \dots$ 즉 지수가 2인 수들이다.
따라서 $2 \times 3 \times 5^2$ 의 지수가 2가 되는지 확인하고, 안 되면 곱해 주면 된다.
 $2 \times 3 \times 5^2$ 이므로, 2하고 3만 제곱 형태로 만들어 주면 된다.
 $2 \times 3 \times 5$ 에 2와 3를 곱하면, $2^2 \times 3^2 \times 5^2$ 가 되어 제곱 형태가 된다.
따라서 곱하는 수는 $2 \times 3 = 6$ 이고, 제곱이 되는 수는 $2^2 \times 2^2 \times 3^2 \times 3^2 = 900$ 이므로 30의 제곱이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 풀이참조

해설

경민의 풀이과정이 옳다. 선혜는 곱할 수 있는 수는 자연수라는 조건을 무시했기 때문에 선혜는 틀렸다.

15. 45에 어떤 자연수를 곱하여 어떤 수의 제곱이 되게 하려고 한다. 곱해야 할 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$45 = 3^2 \times 5$$

따라서 제곱이 되려면 5를 곱해야 한다.

16. $96 \times m = n^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 m, n 에 대하여 $m + n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$96 = 2^5 \times 3 \text{ 이므로 } m = 2 \times 3$$

$$2^5 \times 3 \times (2 \times 3) = 2^6 \times 3^2, n = 2^3 \times 3 = 24$$

$$m = 6, n = 24$$

$$\therefore m + n = 30$$

17. 어떤 자연수 n 에 대하여 $\frac{110}{2 \times n + 1}$ 이 자연수가 된다. 이러한 n 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

110의 약수를 구해보면 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110이다.

그 중 홀수는 1, 5, 11, 55이다.

$2 \times n + 1 = 1$ 에서 $\therefore n = 0$

$2 \times n + 1 = 5$ 에서 $\therefore n = 2$

$2 \times n + 1 = 11$ 에서 $\therefore n = 5$

$2 \times n + 1 = 55$ 에서 $\therefore n = 27$

따라서 자연수 n 의 합을 구하면 $2 + 5 + 27 = 34$

18. 다음 중 12 의 약수가 아닌 것은?

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 5 ⑤ 12

해설

12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12 이다.

19. 24를 어떤 자연수로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이 때 어떤 자연수는 모두 몇 개인가?

- ① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

어떤 수를 나누어 떨어지게 하는 수를 그 어떤 수의 약수라 한다.
24의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24이다.

20. 6의 약수의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 6개

해설

6의 약수는 1, 2, 3, 6이다.
따라서 4개다.

21. 13 이하의 자연수의 곱을 소인수분해 했을 때 소인수의 합을 a , 소인수의 지수의 합을 b 라 하자. 이때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 13 \\ &= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \\ &\quad \times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \\ &= 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \\ &a = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 = 41 \\ &b = 10 + 5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 20 \\ &\therefore a - b = 41 - 20 = 21 \end{aligned}$$

22. $2520 = a^p \times b^q \times c^r \times d^s$ 로 소인수분해될 때, $a \times p + b \times q + \frac{c}{r} + \frac{d}{s}$ 의 값을 구하여라.
(단, $a < b < c < d$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$$2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = a^p \times b^q \times c^r \times d^s \text{ 이므로}$$

$$a = 2, b = 3, c = 5, d = 7,$$

$$p = 3, q = 2, r = 1, s = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore a \times p + b \times q + \frac{c}{r} + \frac{d}{s} \\ &= 2 \times 3 + 3 \times 2 + \frac{5}{1} + \frac{7}{1} \\ &= 6 + 6 + 5 + 7 \\ &= 24 \end{aligned}$$

23. 216 을 소인수분해하면 $2^a \times b^c$ 이다. 이때, $a + b + c$ 의 값은?

① 7

② 9

③ 11

④ 13

⑤ 15

해설

$$216 = 2^3 \times 3^3$$

따라서 $a = 3, b = 3, c = 3$

$$a + b + c = 9$$

24. $126 = a^l \times b^m \times c^n$ 으로 소인수분해될 때, $a + b + c - l - m - n$ 의 값을 구하여라. (단, $a < b < c$ 인 소수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned} 126 &= 2 \times 3^2 \times 7 = a^l \times b^m \times c^n \\ \therefore a &= 2, b = 3, c = 7, l = 1, m = 2, n = 1 \\ \therefore a + b + c - l - m - n &= 2 + 3 + 7 - 1 - 2 - 1 = 8 \end{aligned}$$

25. $2 \times n$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{5}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것은?

- ① 100 ② 200 ③ 300 ④ 400 ⑤ 500

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $2 \times n$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2 가 두 번 곱해져 있고, $\frac{n}{5}$ 이 제곱이므로 n 은 5 가 세 번 곱해져 있다.

$$\therefore n = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$$

26. 자연수 160 에 n 을 곱하면 자연수의 제곱이 된다고 한다. 이 때, n 이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하여라.(단, n 은 50 미만의 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$$160 \times n = 2^5 \times 5 \times n = m^2 \text{ 이라 하면}$$

$$\text{가장 작은 } n = 2 \times 5$$

따라서 n 이 될 수 있는 50 미만의 수는

$$2 \times 5 = 10$$

$$2 \times 5 \times 2^2 = 40$$

$$\therefore 10, 40$$

$$\therefore 10 + 40 = 50$$

27. 48 에 자연수 x 를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다.
다음에서 x 가 될 수 있는 수를 모두 고르면(정답 2개)?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 9
- ⑤ 12

해설

$48 = 2^4 \times 3$
곱해야 할 자연수가 x 이고, 어떤 자연수를 y 라 하면 $(2^4 \times 3) \times x = y^2$ 이다.
 $x = 3 \times 1^2, 3 \times 2^2, \dots$
 $= 3, 12, \dots$

28. 450을 588보다 작은 자연수 a 로 나누었더니 약수의 개수가 홀수인 자연수 b 가 되었다. 가능한 b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 260

해설

약수의 개수가 홀수인 수는 제곱수이므로

$$\frac{450}{a} = \frac{2 \times 3^2 \times 5^2}{a} = k^2 = b \text{라 하면}$$

a 는 $2, 2 \times 3^2, 2 \times 5^2, 2 \times 3^2 \times 5^2$ 이 가능하다.

$$a = 2 \text{일 때, } b = 15^2 = 225$$

$$a = 2 \times 3^2 \text{일 때, } b = 5^2 = 25$$

$$a = 2 \times 5^2 \text{일 때, } b = 3^2 = 9$$

$$a = 2 \times 3^2 \times 5^2 \text{일 때, } b = 1^2 = 1 \therefore 225 + 25 + 9 + 1 = 260$$

29. $18 \times A \times 7^2$ 의 약수의 개수가 36 이라고 한다. 가장 작은 A 의 값을 a , 두 번째로 작은 A 의 값을 b 라고 할 때, $b - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$2 \times 3^2 \times 7^2 \times A$
약수의 개수가 36 개이므로
 A 가 될 수 있는 수는 $2^2, 3^3, 7^3$ 이거나 2, 3, 7 이외의 소수이다.
따라서 가장 작은 값은 $2^2 = 4$,
두 번째로 작은 값은 5
 $\therefore 5 - 4 = 1$

30. $3^3 \times a$ 는 약수의 개수가 12 인 수 중 가장 작은 홀수라고 할 때, a 에 맞는 수를 구하면?

① 1

② 4

③ 9

④ 25

⑤ 36

해설

$$12 = 4 \times 3 = (3 + 1) \times (2 + 1)$$

$3^3 \times a$ 가 홀수이므로

a 는 3 보다 큰 소수의 제곱수이므로 $5^2 = 25$

31. $5^4 \times \square$ 의 약수의 개수가 15 개일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\square = a^x(a\text{는소수})$ 라고 하면 $5^4 \times a^x$ 의 약수의 개수는 15 개이므로
 $(4 + 1) \times (x + 1) = 15, x + 1 = 3, x = 2$ 이다.
또한 가장 작은 자연수가 되기 위해서는 $a = 2$ 이다.
따라서 $\square = a^x = 2^2 = 2 \times 2 = 4$ 이다.

32. 자연수 약수의 개수가 9 개인 어떤 수를 소인수분해했더니 $2^2 \times \square$ 가 되었다. $\square$ 안에 들어갈 가장 작은 수는 무엇인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$9 = 9 \times 1 = 3 \times 3$
i) $9 = 8 + 1$
 $2^2 \times \square = 2^8$
 $\therefore \square = 2^6$
ii) $9 = 3 \times 3 = (2 + 1) \times (2 + 1)$ 일 때,
 $2^2 \times \square = 2^2 \times a^2$ (단, a 는 2 가 아닌 소수이다.)
 $\therefore a = 3, 5, 7, \dots$
 $\therefore \square = 9, 25, 49$
i), ii) 에서 가장 작은 수는 9 이다.

33. 960으로 나누면 나누어 떨어지고, 1 과 자기 자신을 포함한 양의 약수의 개수가 105 개인 최소의 자연수 n 의 값은?
- ① 123500 ② $2^7 \times 3^2 \times 5^2$ ③ 128000
- ④ $2^6 \times 3^3 \times 5$ ⑤ 129600

해설

$N = a^m b^n c^l \dots$ 에서 양의 약수의 개수는 $(m+1)(n+1)(l+1) \dots$ 이고, 약수의 개수가 $105 = 3 \times 5 \times 7$ (개) 이므로 m, n, l 의 값은 차례로 2, 4, 6 이다. 최소의 자연수를 구해야 하므로, a, b, c 의 값을 작은 소수부터 차례로 대입하고, 지수는 큰 수부터 차례로 대입하면 $N = 2^6 \times 3^4 \times 5^2$ 이고, 이 수는 $960 = 2^6 \times 3 \times 5$ 의 배수이므로 129600 이 답이 된다.

34. 100 개의 전구가 일렬로 불이 꺼진 채 놓여 있다. 처음에는 모든 전구의 불을 켜고, 두 번째는 왼쪽에서 짝수 번째에 있는 전구의 불을 끈다. 세 번째는 왼쪽에서 3 의 배수 번째에 있는 전구 중, 불이 켜진 전구는 불을 끄고 불이 꺼진 전구는 불을 켤다. 네 번째는 4 의 배수 번째에 있는 전구 중, 불이 켜진 전구는 불을 끄고 불이 꺼진 전구는 불을 켤다. 다섯 번째는 5 의 배수 번째에 있는 전구를, 여섯 번째에는 6 의 배수 번째에 있는 전구를 위와 같은 방식으로 불을 켜고 끈다. 이렇게 200 번째까지 했을 때, 불이 켜진 전구는 모두 몇 개인지 구하여라. (단, 100 번째까지 한 후, 위의 과정을 한번 더 반복한다.)

▶ 답: 개

▶ 정답 : 0 개

해설

주어진 조건을 보면 n 번째 전구는 n 의 약수의 개수만큼 켜졌다 꺼지기를 반복한다. 1 을 제외한 수 중 약수의 개수가 홀수 개인 수는 어떤 수의 제곱이 되는 수이므로, 100 번째까지 반복했을 때 켜졌다 꺼지기를 홀수 번 반복하는 전구는 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 번째 전구이다. 그런데 이 과정을 200 번 하게 되면 모든 전구는 짝수번 꺼졌다 켜지기를 반복하게 된다. 따라서 불이 켜져 있는 전구는 없다.

35. 다음 자연수 중에서 약수의 개수가 다른 수를 구하여라.

60, 108, $3^4 \times 7^2$, $2 \times 3^2 \times 5$, 5×11^5

▶ 답 :

▷ 정답 : $3^4 \times 7^2$

해설

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 이므로 $(2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 12$ (개)

$108 = 2^2 \times 3^3$ 이므로 $(2 + 1) \times (3 + 1) = 12$ (개)

$3^4 \times 7^2$ 이므로 $(4 + 1) \times (2 + 1) = 15$ (개)

$2 \times 3^2 \times 5$ 이므로 $(1 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 12$ (개)

5×11^5 이므로 $(1 + 1) \times (5 + 1) = 12$ (개)

36. 630의 약수의 개수는?

① 8

② 12

③ 16

④ 24

⑤ 30

해설

$$630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

$$\text{약수의 개수는 } (1+1) \times (2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 24 \text{ (개)}$$