1. 한 변의 길이가 각각 $\sqrt{6}\,\text{cm}$, $\sqrt{8}\,\text{cm}$ 인 정사각형 두 개가 있다. 이 두 정사각형의 넓이를 합하여 하나의 큰 정사각형으로 만들 때, 큰 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

▶ 답: ______ cm

▷ 정답: $\sqrt{14}\,\text{cm}$

해설

$(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{8})^2 = 6 + 8 = 14$

큰 정사각형의 한 변의 길이는 14의 양의 제곱근

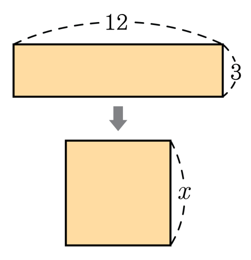
따라서 $\sqrt{14}\,\text{cm}$ 이다.

2. $3.\dot{9}$ 의 음의 제곱근을 a 라고 할 때, a 의 값을 구하면?

① -12 ② -6 ③ -4
④ -2 ⑤ $-\sqrt{3.9}$

해설
$3.\dot{9} = \dfrac{39-3}{9} = 4$, 4 의 음의 제곱근은 -2

3. 다음 그림과 같이 가로가 12이고 세로가 3인 직사각형과 넓이가 같은 정사각형을 그리려고 한다. 이 정사각형의 한 변 x의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 6$

해설

직사각형의 넓이를 구해보면 $12 \times 3 = 36$ 이 된다. 직사각형과 넓이가 같은 정사각형을 만들려면 $x^2 = 36$ 을 만족하여야 한다. 즉, 36 의 제곱근을 구하면 되는 것이다. 36의 제곱근은 ± 6 이다. 그러므로 정사각형 한 변 x의 길이는 6이 된다.

4. 다음 수를 작은 것부터 순서대로 나열할 때, 두 번째로 작은 수를 고르면?

① $\sqrt{2}$ ② -0.5 ③ $1-\sqrt{2}$

④ $2+\sqrt{2}$ ⑤ $1+\sqrt{2}$

해설

① $\sqrt{2} = 1.4\times\times\cdots$

② -0.5

③ $1-\sqrt{2} = 1-1.4\times\times\cdots = -0.4\times\times\cdots$

④ $2+\sqrt{2} = 3.4\times\times\cdots$

⑤ $1+\sqrt{2} = 2.4\times\times\cdots$

∴ ② < ③ < ① < ⑤ < ④

5. 다음 분수들을 큰 수부터 나열하여라.

$\frac{3}{\sqrt{7}}$, $\frac{\sqrt{3}}{7}$, $\sqrt{\frac{3}{7}}$, $\frac{3}{7}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{\sqrt{7}}$

▷ 정답 : $\sqrt{\frac{3}{7}}$

▷ 정답 : $\frac{3}{7}$

▷ 정답 : $\frac{\sqrt{3}}{7}$

해설

$\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{63}}{7}$, $\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\frac{3}{7} = \frac{\sqrt{9}}{7}$

6. 다음 중 두 실수의 대소 관계가 <u>틀린</u> 것은?

① $\sqrt{6}+2<\sqrt{6}+3$
② $4-\sqrt{7}<2\sqrt{7}-2$
③ $2\sqrt{3}+3<6\sqrt{3}-5$
④ $2\sqrt{5}-\sqrt{8}<\sqrt{20}+3\sqrt{2}$
⑤ $3+\sqrt{3}<10-\sqrt{12}$

해설

③ $2\sqrt{3}+3<6\sqrt{3}-5$

$2\sqrt{3}+3-6\sqrt{3}+5=-4\sqrt{3}+8=-\sqrt{48}+\sqrt{64}>0$

$\therefore 2\sqrt{3}+3>6\sqrt{3}-5$

7. $\sqrt{6a}$ 의 값이 자연수가 되게 하는 a 의 값이 50 이상 150 이하일 때, a 의 값들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 300

해설

$\sqrt{6a}$ 가 자연수가 되려면
$a = 6 \times x^2$
$50 \leq 6x^2 \leq 150$
$8.\times\times \leq x^2 \leq 25, x^2 = 9, 16, 25$
$a = 54, 96, 150$
$54 + 96 + 150 = 300$

8. $\sqrt{\dfrac{180}{a}}$ 가 자연수가 되게 하는 정수 a 는 모두 몇 개인가?

① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개　　④ 4 개　　⑤ 5 개

해설

$\sqrt{\dfrac{180}{a}} = \sqrt{\dfrac{2^2 \times 3^2 \times 5}{a}}$

$a = 5,\ 5 \times 2^2,\ 5 \times 3^2,\ 5 \times 2^2 \times 3^2$ 이므로 4 개이다.

9. $\sqrt{10(n-1)}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 두 자리 자연수 n 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $n=11$

▷ 정답 : $n=41$

▷ 정답 : $n=91$

해설

n 이 두 자리의 자연수이므로 $10 \le n \le 99$

$\therefore 9 \le n-1 \le 98$

$\sqrt{10(n-1)}$ 이 자연수가 되기 위해서는

$n-1 = 10 \times 1^2,\ 10 \times 2^2,\ 10 \times 3^2,\ \cdots$

이때, $9 \le n-1 \le 98$ 을 만족해야 하므로

$n-1 = 10 \times 1^2$ 에서 $n = 11$

$n-1 = 10 \times 2^2$ 에서 $n = 41$

$n-1 = 10 \times 3^2$ 에서 $n = 91$

$\therefore n = 11,\ 41,\ 91$

10. $\sqrt{54-x}$ 가 자연수가 되는 양의 정수 x 의 값들의 합은?

① 60 ② 116 ③ 155 ④ 197 ⑤ 238

해설

$\sqrt{54-x}$ 가 자연수가 되기 위해서는,
$54-x=$ 완전제곱수가 되어야 한다.
$54-x=1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49$
$\therefore\ x=5+18+29+38+45+50+53=238$

11. $\sqrt{384-24x}$ 가 자연수일 때, 자연수 x 의 값의 합을 구하면?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

$\sqrt{384-24x}$ 에서
$384-24x=24(16-x)$ 이므로
$\sqrt{24(16-x)}=2\sqrt{6}\times\sqrt{16-x}$ 이다.
$\Rightarrow\ 2\sqrt{2\times3}\times\sqrt{16-x}$
$16-x=6\times1^2=6$
$x=10$ 이다.
$16-x=6\times2^2=24$ 는 $x<0$ 이므로 x 가 자연수가 될 수 없다.
따라서 $x=10$ 의 값 한 개뿐이다.

12. $\sqrt{891-81a}$ 가 자연수일 때, 자연수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

해설

$\sqrt{891-81a}$ 에서
$891-81a=81(11-a)$ 이다.
$\sqrt{81(11-a)}=9\sqrt{11-a}$ 이다.
$\sqrt{11-a}$ 의 값이 제곱수가 되야 하므로
$11-a=1 \Rightarrow a=10$
$11-a=4 \Rightarrow a=7$
$11-a=9 \Rightarrow a=2$
따라서 $a=10,\ 7,\ 2$ 이므로 자연수a 값의 합은 $10+7+2=19$ 이다.

13. 다음 중 옳은 것을 골라라.

보기

㉠ $y = x - \sqrt{3}$ 을 만족하는 유리수 x, y 가 적어도 한 쌍은 존재한다.

㉡ $y = x + \sqrt{2}$ 일 때, $x + y$ 의 값은 항상 무리수이다.

㉢ 임의의 무리수 x 에 대하여 $xy = 1$ 이면 y 도 항상 무리수이다.

㉣ 직선 $y = \sqrt{3}x$ 를 지나는 점의 x 좌표와 y 좌표는 모두 항상 무리수이다.

㉤ $x + y$, $x - y$ 가 모두 무리수이면, x, y 도 항상 무리수이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

㉠ (유리수) ± (유리수) = (유리수) 이므로 두 유리수 x, y 에 대하여 $x - y \neq \sqrt{3}$ $\therefore y \neq x - \sqrt{3}$

㉡ $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이면 $x + y = 0$: 유리수

㉢ 임의의 무리수 x 에 대해 $y = \frac{1}{x}$ 이므로 y 는 항상 무리수이다.

㉣ $y = \sqrt{3}x$ 은 $(0,\ 0)$ 을 지나므로 $x = 0,\ y = 0$: 유리수

㉤ $x = 1, y = \sqrt{3}$ 이면 $x+y = 1+\sqrt{3}$ 으로 무리수, $x-y = 1-\sqrt{3}$ 으로 무리수, 하지만 x는 유리수

14. 유리수 a 와 무리수 b 에 대하여, 다음 보기 중 옳지 <u>않은</u> 것의 개수를 구하여라.

보기

㉠ $\sqrt{a} \times b$ 는 항상 무리수이다.

㉡ $b = a - \sqrt{3}$ 를 만족시키는 a, b 가 존재한다.

㉢ $\frac{b}{a}$ 는 항상 무리수이다.

㉣ $\frac{b}{\sqrt{a}} = 1$ 을 만족시키는 a, b 가 존재한다.

㉤ $\sqrt{a} + b$ 는 유리수이다.

▶ 답: ＿＿＿ 개

▷ 정답: 2 개

해설

㉠ $a = 2$, $b = \sqrt{2}$ 일 때, $\sqrt{a} \times b = 2$ 가 되어 유리수이므로 옳지 않다.
㉤ $a = 3$, $b = \sqrt{3}$ 일 때, $\sqrt{a} + b = 2\sqrt{3}$ 이 되어 무리수가 되므로 옳지 않다.
따라서 보기 중 옳지 않은 것의 개수는 2 개이다.

15. 다음 보기 중 옳은 것은 모두 몇 개인지 구하여라.

보기

㉠ a가 자연수 일 때, $\sqrt{a}$가 유리수인 경우가 있다.
㉡ $\frac{(\text{정수})}{(0\text{이 아닌 정수})}$ 꼴로 나타낼 수 없는 수는 무리수이다.
㉢ 무리수에는 음수와 양수가 모두 존재 한다.
㉣ 근호 안의 수가 제곱수인 수는 무리수이다.
㉤ $\sqrt{n}$ 이 무리수가 되는 것은 n이 소수일 때이다.

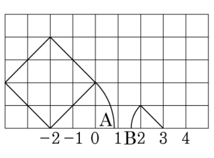
▶ 답: 개

▷ 정답: 3개

해설

㉣ 근호 안의 수가 제곱수인 수는 유리수이다.
㉤ $\sqrt{6}$ 은 무리수이지만, 6 은 소수가 아니다.

16. 다음 수직선 위에 대응하는 두 점 A, B 에서 점 A 의 좌표를 a , 점 B 의 좌표를 b 라고 할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라. (작은 사각형 하나는 정사각형이다.)



▶ 답 :

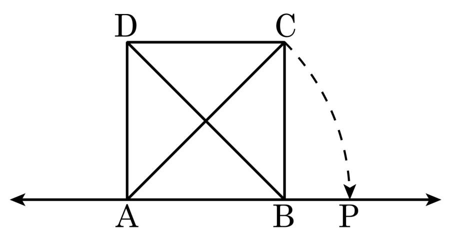
▷ 정답 : $-5 + 3\sqrt{2}$

해설

점 A 의 좌표 : $a = -2 + \sqrt{8}$
점 B 의 좌표 : $b = 3 - \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \therefore \mathrm{a} - \mathrm{b} &= -2 + \sqrt{8} - (3 - \sqrt{2}) \\ &= -2 + 2\sqrt{2} - 3 + \sqrt{2} \\ &= -5 + 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

17. 다음 그림에서 ABCD 는 한 변의 길이가 1 인 정사각형이고, $\overline{AC} = \overline{AP}$ 이다. 점 B 에 대응하는 수가 $2 + \sqrt{2}$ 일 때, 점 P 에 대응하는 수가 $a + b\sqrt{2}$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

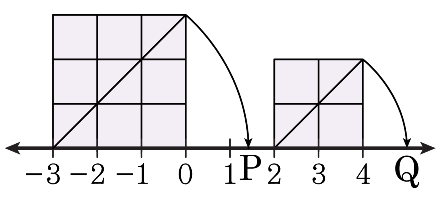
▷ 정답 : $a + b = 3$

해설

점 A 의 좌표는 $2 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2}$

점 P 의 좌표는 $(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2}$ 이므로 $a + b = 3$ 이다.

18. 다음 그림에서 점 P 의 좌표를 a, 점 Q 의 좌표를 b 라고 할 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

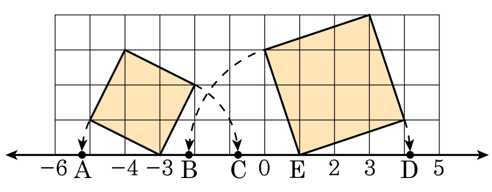
▷ 정답 : $\frac{9-6\sqrt{2}}{2}$

해설

$a = -3 + 3\sqrt{2},\ b = 2 + 2\sqrt{2}$

$$\frac{a}{b} = \frac{-3+3\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}} = \frac{(-3+3\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})}{(2+2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})} = \frac{-6+6\sqrt{2}+6\sqrt{2}-12}{-4} = \frac{-18+12\sqrt{2}}{-4} = \frac{9-6\sqrt{2}}{2}$$

19. 다음 그림의 수직선 위의 점 A, B, C, D 에 대응하는 수를 각각 a, b, c, d 라고 할 때, $(b+d)-(a+c)$ 값을 구하여라. (단, 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1 인 정사각형이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

(1) 작은 정사각형 한 변의 길이 : $\sqrt{5}$

$\therefore\ a=-3-\sqrt{5}$, $c=-3+\sqrt{5}$

(2) 큰 정사각형 한 변의 길이 : $\sqrt{10}$

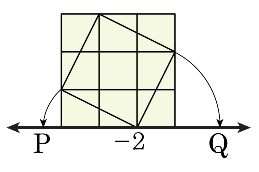
$\therefore\ b=1-\sqrt{10}$, $d=1+\sqrt{10}$

$\therefore\ b+d=1-\sqrt{10}+1+\sqrt{10}=2$

$\therefore\ a+c=-3-\sqrt{5}+(-3+\sqrt{5})=-6$

따라서 $(b+d)-(a+c)=2-(-6)=8$ 이다.

20. 다음 그림은 넓이가 5 인 정사각형이다. 점 P 의 좌표는 a , 점 Q 의 좌표를 b 라고 할 때, $b-a$ 를 구하여라.



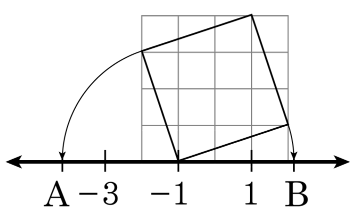
▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{5}$

해설

정사각형의 넓이가 5 이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$ 이다.
$a=-2-\sqrt{5}$, $b=-2+\sqrt{5}$,
$b-a=-2+\sqrt{5}-(-2-\sqrt{5})=2\sqrt{5}$

21. 다음 수직선에서 점 A , 점 B 의 좌표를 구하여라.



▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 점 A : $-1-\sqrt{10}$

▷ 정답 : 점 B : $-1+\sqrt{10}$

해설

내부의 기울어진 정사각형의 넓이가 10 이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{10}$

22. 한 변의 길이가 a 이고 높이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 인 정삼각형과 그 둘레의 길이가 같은 정사각형이 있다면, 이 정사각형의 넓이는 정삼각형 넓이의 몇 배인가 ?

① 1 배　② 2 배　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 배

④ $3\sqrt{3}$ 배　⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 배

해설

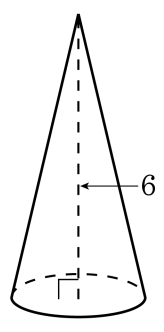
정삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$,

정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{3}{4}a$ 이므로 정사각형의 넓이는 $\frac{9}{16}a^2$

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \square = \frac{9}{16}a^2$

$\therefore \square = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (배)

23. 다음 그림의 원뿔의 부피가 12 일 때, 밑면의 반지름의 길이를 구하여라. (원주율은 3으로 한다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $x = \sqrt{2}$

해설

$12 = \frac{1}{3} \times x^2 \times 3 \times 6$

$12 = 6x^2$

$\therefore x = \sqrt{2}\ (\because x > 0)$

24. 두 정삼각형 P, Q 에 대해 $(\text{P의 넓이}) = 6 \times (\text{Q의 넓이})$ 가 성립한다. P 의 둘레의 길이는 Q 의 둘레의 길이의 몇 배인지 구하여라.

▶ 답: ______ 배

▷ 정답: $\sqrt{6}$ 배

해설

Q 의 한 변의 길이를 a 라고 할 때, P 의 한 변의 길이는 $a\sqrt{6}$ 가 성립한다.
따라서 $3 \times a\sqrt{6} = 3a \times \sqrt{6}$ 이므로 P 의 둘레의 길이는 Q 의 둘레의 길이의 $\sqrt{6}$ 배이다.