1. 두 자연수 a, b 가 있다. a 를 b 로 나누었더니 몫이 16 , 나머지가 3 이었다. 이때, a를 4 로 나누었을 때의 나머지는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$a = b \times 16 + 3 = 4 \times b \times 4 + 3$ 이다. 따라서 나머지는 3 이다.

2. 어떤 수를 15 로 나누면 7 이 남는 수 중 100 에 가장 가까운 수는?

① 90 ② 92 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99

해설

어떤 수를 x 라 하고 몫을 k 라 하면 $x = 15 \times k + 7$ 이다.
$k = 6$ 일 때, $x = 15 \times 6 + 7 = 97$ 이고 $k = 7$ 일 때, $x = 15 \times 7 + 7 = 112$ 이다.
따라서 100 에 가장 가까운 수는 97 이다.

3. 바둑돌을 다음과 같이 배열하였다. 왼쪽에서부터 50 번째까지의 빨간 바둑돌은 몇 개인가?

① 21 개　② 23 개　③ 25 개　④ 26 개　⑤ 28 개

해설

빨간 바둑돌은 3 개씩, 파란 바둑돌은 2 개씩, 노란 바둑돌은 1 개씩 반복된다. 따라서 다시 빨간 바둑돌이 다시 배열 될 때까지는 총 6 개의 바둑돌이 필요하다. 따라서 6 개씩 반복된다. $50 = 6 \times 8 + 2$ 이므로 50 번째까지 빨간 바둑돌의 개수는 3 개씩 8 번이 반복되고 2 개가 더 배열된다. 따라서 26 개이다.

4. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 10 은 10 의 약수이면서 10 의 배수이다.

② 모든 자연수는 자기 자신의 약수인 동시에 배수이다.

③ 1 은 모든 자연수의 배수이다.

④ 384 은 6 의 배수이다.

⑤ 9 는 54 의 약수이다.

해설

1 은 모든 자연수의 약수이다.

5. 567^{2009} 의 일의 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

567^{2009} 의 일의 자리만 거듭제곱하여 규칙을 찾는다.
$7^1 = 7$,
$7^2 = 49$,
$7^3 = 343$,
$7^4 = 2401$,
$7^5 = 16807$,
$7^6 = 117649$,
$\cdots$
7 을 거듭제곱할 때, 일의 자리의 숫자가 7, 9, 3, 1 의 네 개의 숫자가 반복된다.
567^{2009} 의 지수인 2009 를 4 로 나누면
$2009 \div 4 = 502 \cdots 1$ 이므로
567^{2009} 의 일의 자리의 숫자는 반복되는 네 개의 숫자 중 첫 번째 숫자인 7 이다.

6. 옛날부터 우리나라에는 십간(☒☒)과 십이지(☒☒☒)를 이용하여 매해에 이름을 붙였다. 십간과 십이지를 차례대로 짝지으면 다음과 같이 그 해의 이름을 만들 수 있다. 다음 표에서 알 수 있듯이 2011년은 신묘년이다. 다음 중 신묘년이 아닌 해는?

정	무	기	경	신	임	계	갑
축	인	묘	진	사	오	미	신
정축	무인	기묘	경진	신사	임오	계미	갑신
1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004

을	병	정	무	기	경	신
유	술	해	자	축	인	묘
을유	병술	정해	무자	기축	경인	신묘
2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011

① 1831년 ② 1881년 ③ 1951년
④ 2071년 ⑤ 2131년

해설

십간(☒☒)의 10가지와 십이지(☒☒☒)의 12가지를 계속 돌아가면서 조합이 이루어지므로 같은 이름의 년도는 60년 만에 한 번씩 돌아오게 된다. 따라서 2011년이 신묘년이면 1831년, 1891년, 1951년, 2071년, 2131년도 신묘년이다.

7. 다음 중 소수는 모두 몇 개인지 구하여라.

47, 53, 65, 97, 117, 153

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 3 개

해설

47 의 약수 : 1, 47
53 의 약수 : 1, 53
65 의 약수 : 1, 5, 13, 65
97 의 약수 : 1, 97
117 의 약수 : 1, 3, 9, 13, 39, 117
153 의 약수 : 1, 3, 9, 17, 51, 153
이므로 소수는 47, 53, 97 의 3 개이다.

8. 10 이상 30 이하의 자연수 중 약수의 개수가 2 개인 수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 6 개

해설

약수의 개수가 2 개인 수는 소수이다. 10 이상 30 이하의 소수는 11, 13, 17, 19, 23, 29 의 6개이다.

9. 다음 자연수 중 소수가 아닌 것을 모두 고르면?

① 1 ② 2 ③ 5 ④ 7 ⑤ 14

해설

① 1 은 소수도 합성수도 아니다.
⑤ 14 는 합성수이다.

10. 다음 중 옳은 것을 골라라.

> ㉠ 1 은 소수이다.
>
> ㉡ 2 는 소수가 아니다.
>
> ㉢ 짝수인 소수는 2 뿐이다.
>
> ㉣ 소수는 모두 홀수이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

㉠ 1 은 소수가 아니다.
㉡ 2 는 소수이다.
㉣ 2 는 소수이다.

11. 다음 중 옳은 것을 고르면?

① 1 은 소수이다.

② 모든 소수는 홀수이다.

③ 두 소수의 곱은 합성수이다.

④ 20 이하의 소수는 9 개이다.

⑤ 소수의 제곱은 항상 네 개의 약수를 갖는다.

해설

① 1 은 소수도 합성수도 아니다.
② 2 는 소수이지만 짝수이다.
④ 20 이하의 소수는 $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ 이므로 총 8 개이다.
⑤ 소수 a 의 제곱은 항상 세 개의 약수 $(1, a, a^2)$ 를 갖는다.

소수의 제곱	약수
$2^2=4$	1, 2, 4
$3^2=9$	1, 3, 9
$5^2=25$	1, 5, 25
⋮	⋮

12. 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?(정답 2 개)

① 1 은 소수가 아니다.

② 모든 소수는 홀수이다.

③ 모든 수는 약수의 개수가 2 개 이상이다.

④ 가장 작은 소수는 3 이다.

⑤ 4 와 9 는 서로소이다.

해설

② 소수는 2, 3, 5, 7, $\cdots$ 이다.
③ 1 의 약수는 1 뿐이다.
④ 가장 작은 소수는 2 이다.

13. 75 에 가능한 한 작은 자연수 x로 나누어서 어떤 자연수 y 의 제곱이 되게 하려고 한다. y의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 9 ⑤ 15

해설

75 를 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 75 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$75 = 3 \times 5^2$ 이므로 $\dfrac{3 \times 5^2}{x} = y^2$ 을 만족하는 x 의 값 중 가장 작은 자연수는 3 이다. 따라서 $y = 5$ 이다.

14. 75 에 가능한 한 작은 자연수 x를 곱하여 어떤수 y 의 제곱이 되게 하려고 한다. y의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 9 ⑤ 15

해설

75 를 소인수분해하면 $75 = 3 \times 5^2$ 이므로
$(3 \times 5^2) \times x = y^2$ 을 만족하는 x 의 값 중 가장 작은 자연수는 3 이다.
따라서 $y = 15$ 이다.

15. $90 \times A = B^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 A 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

90 을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$ 이므로 $2 \times 3^2 \times 5 \times A = B^2$ 을 만족하는 A 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 2×5 이다.

16. 1 부터 50 까지의 자연수 중에서 약수의 개수가 3 개인 자연수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

자연수 n 의 약수의 개수가 3 개이기 위해서는
1 과 n 이외에 약수가 한 개만 더 있어야하므로
자연수 n 은 소수의 완전제곱수이어야 한다.
따라서 1 부터 50 까지의 완전제곱수를 구하면
$7^2 = 49 < 50$ 이고 $11^2 = 121 > 50$ 이므로
50 이하인 소수의 완전제곱수는
2^2, 3^2, 5^2, 7^2 이다.

17. a 가 자연수일 때, $f(a)$ 는 a 의 약수의 개수를 나타낸다고 정의한다. x는 1 이상이고 150 이하이고, $f(x)=3$ 일 때, x의 값의 개수는?

① 6개 ② 5개 ③ 4개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

$f(x)=3$ 에서 약수의 개수가 3 개인 수는
$(\text{소수})^2$ 이므로
150 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는
$2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2$ 의 5 개

18. 1 부터 50 사이의 수 중에서 약수의 개수가 3 개인 수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

약수의 개수가 3 개인 수는 (소수)^2 이므로
50 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는 2^2, 3^2, 5^2, 7^2 의 4 개

19. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?(정답 2 개)

① 15 이하의 소수는 모두 6 개이다.

② 7 은 소수이다.

③ 모든 소수는 홀수이다.

④ 자연수는 1 , 소수, 합성수로 이루어져 있다.

⑤ 1 은 합성수이다.

해설

③ 2 는 소수이다.
⑤ 1 은 소수도 합성수도 아니다.

20. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 2 는 소수이다.

② 1 과 그 수 자신만의 약수를 가지는 자연수를 소수라 한다.

③ 1 은 소수가 아니다.

④ 합성수는 약수가 3 개 이상인 수이다.

⑤ 소수는 약수가 1 개뿐이다.

해설

소수는 약수가 2 개이다.

21. 1보다 큰 자연수 중에서 1과 그 자신만을 약수로 가지는 수를 소수라고 한다. 기원전 300년경 그리스의 수학자로 소수가 무한히 많음을 증명한 사람은?

① 칸토어 ② 유클리드 ③ 오일러
④ 골드바흐 ⑤ 가우스

해설

유클리드는 '소수가 무한이다.' 라는 것을 증명하였습니다.

22. 다음은 골드바흐가 생각해 낸 소수에 관한 추측이다. 골드바흐의 추측을 가장 잘 설명하고 있는 식은?

보기

[골드바흐의 추측]
2 보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다.

① $7 = 3 + 4$
② $12 = 5 + 7$
③ $14 = 5 + 9$
④ $14 = 2 + 5 + 7$
⑤ $17 = 1 + 5 + 11$

해설

소수는 $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13, \cdots$ 이므로 골드바흐의 추측을 가장 잘 설명한 것은 $12 = 5 + 7$ 이다.

23. 다음 보기 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라.

보기

㉠ 합성수는 모두 짝수이다.

㉡ 3 의 배수 중 소수는 1 개뿐이다.

㉢ 2 는 가장 작은 소수이다.

㉣ 짝수인 소수는 2 뿐이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

해설

㉠ 15 는 합성수이지만 홀수이다.

24. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?(정답 2 개)

① 161 은 소수가 아니다.

② 모든 자연수는 약수가 2 개 이상이다.

③ 1 은 소수도 아니고 합성수도 아니다.

④ 25 이하의 소수의 개수는 10 개이다.

⑤ 소수는 약수가 2 개뿐이다.

해설

② 자연수 1 은 약수가 1 개이다.
④ 25 이하의 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 이다.

25. 다음은 골드바흐가 생각해낸 소수에 관한 추측이다. 골드바흐의 추측을 설명한 것이 아닌 것은?

보기

[골드바흐의 추측]
2 보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다.

① $12 = 5 + 7$ ② $14 = 3 + 11$ ③ $16 = 5 + 11$
④ $18 = 7 + 11$ ⑤ $20 = 9 + 11$

해설

소수는 $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13, \cdots$ 이므로 골드바흐의 추측을 설명한 것이 아닌 것은 $20 = 9 + 11$ 이다.

26. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?(정답 2 개)

① 10 이하의 소수는 모두 5 개이다.

② 1 은 소수이다.

③ 모든 소수는 자신을 약수로 갖는다.

④ 합성수는 3 개 이상의 약수를 갖는다.

⑤ 소수는 짝수가 없다.

해설

① 10 이하의 소수는 2, 3, 5, 7 이다.
② 1 은 소수도 합성수도 아니다.
⑤ 2 는 소수이다.

27. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 3 은 소수이다.

② 1 과 그 수 자신만의 약수를 가지는 자연수를 소수라 한다.

③ 가장 작은 소수는 1 이다.

④ 2 의 배수 중 소수는 1 개이다.

⑤ 소수는 약수가 2 개이다.

해설

가장 작은 소수는 2이다.

28. $48\times x = y^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$2^4\times 3\times x = y^2$

가장 작은 $x = 3$,

$2^4\times 3\times 3 = 2^4\times 3^2 = y^2$

$y = 2^2\times 3 = 12$

$\frac{x}{y} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

29. $360 \times a = b^2$ 을 만족시키는 자연수 a, b 중에서 가장 작은 수를 각각 x, y 라고 할 때 $x+y$ 의 값으로 알맞은 것은?

① 70 ② 80 ③ 90 ④ 100 ⑤ 110

해설

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
지수가 2의 배수이어야 하므로 $x = 2 \times 5$ 이다.
$(2^2 \times 3 \times 5)^2 = 60^2$, $x = 10$, $y = 60$
따라서 $x + y = 70$ 이다.

30. 300 을 가능한 한 작은 자연수 a 로 나누어 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

어떤 자연수의 제곱이 되려면 소인수분해했을 때 모든 소인수의 지수가 짝수이어야 한다.
$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$ 이므로 a 는 3, 3×2^2, 3×5^2, $3 \times 2^2 \times 5^2$ 이 될 수 있고 가장 작은 a 는 3 이다.
나눈 후에는 $300 \div 3 = 100 = 10^2$ 이 된다.
$\therefore\ a = 3,\ b = 10$
$\therefore\ a + b = 13$

31. 72를 x로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되면서 3 의 배수는 되지 않도록 할 때, 나눌 수 있는 가장 작은 자연수 x 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 18

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$

$\frac{72}{x} = \frac{2^3 \times 3^2}{x}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 $x = 2, x = 2 \times 3^2, x = 2^3, x = 2^3 \times 3^2$ 이다.

3 의 배수가 되지 않아야 하므로 $x = 2 \times 3^2, x = 2^3 \times 3^2$ 중 작은 자연수는 $x = 2 \times 3^2 = 18$ 이다.

32. 72 에 가장 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, a , b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

▷ 정답: $b = 12$

해설

$72 \times a = b^2$ 에서
$72 = 2^3 \times 3^2$
$a = 2$
$2^3 \times 3^2 \times 2 = b^2$
$2^4 \times 3^2 = b^2$
$b = 2^2 \times 3 = 12$

33. $\dfrac{252}{A} = B^2$ 을 만족하는 자연수 A, B 에 대하여 B 의 최댓값은?

① 2 ② 3 ③ 6 ④ 8 ⑤ 14

해설

252 를 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 252 \\ 2 & 126 \\ 3 & 63 \\ 3 & 21 \\ & 7 \end{array}$$

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ 이므로 $\dfrac{2^2 \times 3^2 \times 7}{A} = B^2$ 을 만족하는 B 의 값 중에서 가장 큰 자연수는 $A = 7$ 일 때 $2 \times 3 = 6$ 이다.

34. 어떤 자연수 n 에 대하여 $\frac{110}{2\times n+1}$ 이 자연수가 된다. 이러한 n 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 34

해설

110 의 약수를 구해보면 $1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110$ 이다.
그 중 홀수는 1, 5, 11, 55 이다.
$2\times n+1=1$ 에서 $\therefore\ n=0$
$2\times n+1=5$ 에서 $\therefore\ n=2$
$2\times n+1=11$ 에서 $\therefore\ n=5$
$2\times n+1=55$ 에서 $\therefore\ n=27$
따라서 자연수 n 의 합을 구하면 $2+5+27=34$

35. n 이 자연수일 때, $\frac{18}{n}$ 도 자연수가 된다. 이러한 n 의 값의 합은?

① 20 ② 21 ③ 33 ④ 39 ⑤ 49

해설

18 의 약수는 1, 2, 3, 6, 9, 18 이다.
따라서 n 의 값의 합은 $1+2+3+6+9+18=39$

36. 6의 약수의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 6개

해설

6의 약수는 1, 2, 3, 6이다.
따라서 4개다.

37. 네 자리의 정수 41□2 가 3 의 배수인 동시에 4 의 배수가 되도록 □ 안에 알맞은 수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

3의 배수는 자리 수의 합이 3 의배수 이므로 41□2 ⇒ $4+1+□+2=7+□$ 에서 □ 안에 들어갈 수 있는 수는 2, 5, 8 이다.
4 의 배수는 마지막 두 자리가 4 의 배수이어야 하므로 41□2⇒□2 에서
□ 안에 들어갈 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9 이다.
따라서 동시에 만족하는 수는 5 이다.

38. 일곱 자리 수 $a132784$ 가 7 의 배수이고, 네 자리 수 $b8c1$ 이 11 의 배수일 때, $a+b+c$ 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

7 의 배수 : 뒤에서부터 세 자리씩 끊어서 더하고 뺀 수가 0 이거나 7 의 배수인 수이므로,
$a-132+784=7k \rightarrow 652+a=7k$ 이므로 $a=6$ 이다.
11 의 배수 : 짝수 자리 수의 합에서 홀수 자리 수의 합을 뺀 절댓값이 0 이거나 11 의 배수이므로,
$b+c-9=11n \rightarrow b+c=9$ 이다.
$\therefore a+b+c=15$

39. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 의 숫자 카드를 사용해 만든 세 자리의 수를 만들 때, 9 의 배수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 765

해설

9 의 배수는 각 자리 수를 모두 더한 값이 9 의 배수이다.
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 의 숫자 카드를 사용해 만든 세 자리의 수 중에서,
7 로 시작하면서 각 자리의 수를 모두 더하면 9 의 배수가 되는 수는 765 이다.
∴ 9 의 배수 중 가장 큰 수=765

40. 13 이하의 자연수의 곱을 소인수분해 했을 때 소인수의 합을 a, 소인수의 지수의 합을 b 라 하자. 이때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 21

해설

$1\times 2\times 3\times\cdots\times 13$

$=2\times 3\times 2^2\times 5\times(2\times 3)\times 7\times 2^3\times 3^2$

$\quad\times(2\times 5)\times 11\times(2^2\times 3)\times 13$

$=2^{10}\times 3^5\times 5^2\times 7\times 11\times 13$

$a=2+3+5+7+11+13=41$

$b=10+5+2+1+1+1=20$

$\therefore\ a-b=41-20=21$

41. $2520 = a^p \times b^q \times c^r \times d^s$ 로 소인수분해될 때, $a \times p + b \times q + \dfrac{c}{r} + \dfrac{d}{s}$ 의 값을 구하여라.
(단, $a < b < c < d$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = a^p \times b^q \times c^r \times d^s$ 이므로
$a = 2,\ b = 3,\ c = 5,\ d = 7$,
$p = 3,\ q = 2,\ r = 1,\ s = 1$
$\therefore a \times p + b \times q + \dfrac{c}{r} + \dfrac{d}{s}$
$= 2 \times 3 + 3 \times 2 + \dfrac{5}{1} + \dfrac{7}{1}$
$= 6 + 6 + 5 + 7$
$= 24$

42. 196 을 $a^m \times b^n$ 으로 소인수분해하였을 때, $a+b+m+n$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$196 = 2^2 \times 7^2$

따라서 $a=2,\ b=7, m=2, n=2$

$a+b+m+n=13$

43. $2 \times n$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{5}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것은?

① 100 ② 200 ③ 300 ④ 400 ⑤ 500

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $2 \times n$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2 가 두 번 곱해져 있고, $\frac{n}{5}$ 이 제곱이므로 n 은 5 가 세 번 곱해져 있다.

$\therefore n = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$

44. x는 $3^7 \times 5^4$ 의 약수 중에서 a^2 의 형태로 나타낼 수 있는 수일 때, x 값의 개수를 구하여라. (단, a 는 자연수)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12개

해설

$3^7 \times 5^4$ 의 약수 중 (자연수)^2 이 되는 수는
$1,\ 3^2,\ (3^2)^2,\ (3^3)^2,\ 5^2,\ (5^2)^2,\ (3\times5)^2,$
$(3\times5^2)^2,\ (3^2\times5)^2,\ (3^2\times5^2)^2,\ (3^3\times5)^2,$
$(3^3\times5^2)^2$ 이다.
$\therefore$ 12개이다.

45. 54 에 두 자리 자연수 a 를 곱하였더니 b^2 이 되었다. 가능한 $(a,\ b)$ 를 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $(24,\ 36)$

▷ 정답: $(54,\ 54)$

▷ 정답: $(96,\ 72)$

해설

$54 \times a = 2 \times 3^3 \times a = b^2$ 이므로
$a = 2 \times 3 \times x^2$ (x 는 자연수) 꼴이어야 한다.
a 는 두 자리 자연수이므로
$2 \times 3 \times 2^2 = 24,\ 2 \times 3 \times 3^2 = 54,\ 2 \times 3 \times 4^2 = 96$
(i) a 가 24 일 때
$2 \times 3^3 \times 2^3 \times 3 = 2^4 \times 3^4 = (2^2 \times 3^2)^2 = 36^2$
$\therefore\ b = 36$
(ii) a 가 54 일 때
$2 \times 3^3 \times 2 \times 3^3 = (2 \times 3^3)^2 = 54^2$
$\therefore\ b = 54$
(iii) a 가 96 일 때
$2 \times 3^3 \times 2^5 \times 3 = 2^6 \times 3^4 = (2^3 \times 3^2)^2 = 72^2$
$\therefore\ b = 72$
$\therefore\ (24,\ 36),\ (54,\ 54),\ (96,\ 72)$

46. $2^a \times 3^b \times 11^c$ 이 132 를 약수로 가질 때, 세 자연수 a, b, c 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

132 를 소인수분해하면 $132 = 2^2 \times 3 \times 11$ 이다. 한편 $2^a \times 3^b \times 11^c$ 이 132 를 약수로 가지므로 a 는 2 보다 크거나 같고, b 는 1 보다 크거나 같다. 또한 c 도 1 보다 크거나 같다.
따라서 a, b, c 의 최솟값은 각각 $2, 1, 1$ 이므로 구하는 합은 $2 + 1 + 1 = 4$ 이다.

47. $3^a \times 5^b$ 이 225 를 약수로 가질 때, 두 자연수 a, b 의 최솟값을 고르면?

① 1, 1 ② 1, 2 ③ 2, 1 ④ 2, 2 ⑤ 2, 3

해설

$3^a \times 5^b$ 이 225 $= 3^2 \times 5^2$ 을 약수로 가지므로, a 는 2 이상의 자연수, b 는 2 이상의 자연수가 되어야 한다.
그 중 최솟값은 $a = 2$, $b = 2$ 일 때이다.

48. $2^2 \times 5 \times 7$ 의 약수를 모두 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70, 140

해설

2^2 의 약수는 1 , 2 , 2^2 이고, 5×7 의 약수는 $1, 5, 7, 5 \times 7$ 이므로 표를 이용하여 약수를 구하면 다음과 같다.

×	1	2	2^2
1	$1 \times 1 = 1$	$1 \times 2 = 2$	$1 \times 2^2 = 4$
5	$5 \times 1 = 5$	$5 \times 2 = 10$	$5 \times 2^2 = 20$
7	$7 \times 1 = 7$	$7 \times 2 = 14$	$7 \times 2^2 = 28$
5×7	$5 \times 7 \times 1 = 35$	$5 \times 7 \times 2 = 70$	$5 \times 7 \times 2^2 = 140$

따라서 $2^2 \times 5 \times 7$ 의 약수는 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70, 140 이다.

49. 504 의 약수의 개수와 $3^x \times 7^2 \times 13^y$ 의 약수의 개수가 같다고 한다. 이때, $x-y$ 의 값을 구하여라. (단, x, y 는 $x > y$ 인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ 이므로 약수의 개수가 같기 위해서는 $x = 3$, $y = 1$ 이어야 한다. ($\because$ $x > y$)
$\therefore$ $x - y = 3 - 1 = 2$

50. 약수의 개수가 24 개이고, $2^a \times 3^b \times 5^c$ 으로 소인수분해되는 자연수는 모두 몇 개인지 구하여라. (단 a, b, c 는 자연수)

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 9 개

해설

$24 = 2 \times 2 \times 6 = 2 \times 4 \times 3 = 4 \times 2 \times 3 = 4 \times 3 \times 2$
$= 2 \times 6 \times 2 = 2 \times 3 \times 4 = 3 \times 4 \times 2 = 3 \times 2 \times 4$
$= 6 \times 2 \times 2$
이므로 자연수는 9 개이다.

51. $2^a \times 3^b$ 의 약수의 개수가 6 개 일 때, $2^a \times 3^b$ 이 가장 작은 자연수가 되도록 하는 a, b 를 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

▷ 정답: $b = 1$

해설

자연수 A 가 $A = a^m \times b^n$ 으로 소인수분해될 때 (A 의 약수의 개수)는 $(m+1) \times (n+1)$ 개 이다.

$$\begin{aligned} 6 &= 1 \times 6 = (0+1) \times (5+1) \\ &= 6 \times 1 = (5+1) \times (0+1) \\ &= 2 \times 3 = (1+1) \times (2+1) \\ &= 3 \times 2 = (2+1) \times (1+1) \end{aligned}$$

이므로, (a, b) 의 순서쌍으로 가능한 순서쌍은 모두 $(0, 5)$, $(5, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ 이다.

i) $(a, b) = (0, 5)$ 일 때,
구하고자 하는 수는 $2^0 \times 3^5 = 1 \times 3^5 = 243$ 이다.

ii) $(a, b) = (5, 0)$ 일 때,
구하고자 하는 수는 $2^5 \times 3^0 = 2^5 \times 1 = 32$ 이다.

iii) $(a, b) = (1, 2)$ 일 때,
구하고자 하는 수는 $2^1 \times 3^2 = 18$ 이다.

iv) $(a, b) = (2, 1)$ 일 때,
구하고자 하는 수는 $2^2 \times 3^1 = 12$ 이다.

따라서 i), ii) iii), iv) 에서 가장 작은 수는 12 이다.

52. $18 \times A \times 7^2$ 의 약수의 개수가 36 이라고 한다. 가장 작은 A 의 값을 a , 두 번째로 작은 A 의 값을 b 라고 할 때, $b - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$2 \times 3^2 \times 7^2 \times A$
약수의 개수가 36 개이므로
A 가 될 수 있는 수는 2^2, 3^3, 7^3 이거나 2, 3, 7 이외의 소수이다.
따라서 가장 작은 값은 $2^2 = 4$,
두 번째로 작은 값은 5
$\therefore\ 5 - 4 = 1$

53. $5^4 \times \square$의 약수의 개수가 15 개일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$\square = a^x$(a는소수) 라고 하면 $5^4 \times a^x$ 의 약수의 개수는 15 개이므로

$(4+1) \times (x+1) = 15$, $x+1 = 3$, $x = 2$ 이다.

또한 가장 작은 자연수가 되기 위해서는 $a = 2$ 이다.

따라서 $\square = a^x = 2^2 = 2 \times 2 = 4$ 이다.

54. $14 \times \square \times 35$ 의 약수의 개수가 36 일 때, $\square$안에 들어갈 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

(i) $\square = 2^a$ 일 때

$36 = (5+1) \times (2+1) \times (1+1)$ 이므로

$\square = 2^4 = 16$

(ii) $\square \neq 2^a$ 일 때

$36 = (a+1) \times (1+1) \times (2+1) \times (1+1)$

$a = 2$, 가장 작은 자연수는 $3^2 = 9$

$\therefore$ (i), (ii)에서 가장 작은 자연수는 9

55. 90 보다 작은 자연수 x 에 대하여, x 를 17 로 나눈 몫이 k 이면 나머지도 k 가 되는 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

x 를 17 로 나눈 몫이 k 이면 나머지도 k 가 되는 수는 $17k+k=18k$ 로 쓸 수 있다.
따라서 90 보다 작은 수 중 18 의 배수가 되는 수는 18, 36, 54, 72 이다.
$\therefore n(B)=4$

56. 다음 중 어떤 수를 5 로 나누었을 때의 나머지가 될 수 없는 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$0 \leq$ (나머지) < 5

57. 바둑돌을 다음과 같이 배열하였다. 왼쪽에서부터 232 번째 바둑돌의 색깔과 왼쪽에서부터 100 번째까지의 검은 바둑돌의 개수를 순서대로 쓴 것은?

① 검은색, 20 개 ② 검은색, 40 개 ③ 검은색, 60 개
④ 흰색, 40 개 ⑤ 흰색, 60 개

해설

검은 바둑돌은 3 개씩, 흰 바둑돌은 2 개씩 반복된다. 따라서 다시 검은 바둑돌이 다시 배열 될 때까지는 총 5 개의 바둑돌이 필요하다. 따라서 5 개씩 반복된다. $232 = 5 \times 46 + 2$ 이므로 5 개씩 46 번 반복되고, 나머지가 2 이므로 232 번째 바둑돌의 색은 검은색이다. 그리고 100 번째까지 검은 바둑돌의 개수는 3 개씩 20 번이 반복된다. 따라서 60 개이다.