

1. $\sqrt{\frac{54}{n^3}}$ 가 유리수가 되도록 하는 최소의 자연수 n 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$\sqrt{\frac{54}{n^3}} = \frac{3\sqrt{6}}{n\sqrt{n}}$ 이므로 유리수가 되기 위하여 근호가 없어져야 한다. 따라서 $\sqrt{\frac{54}{n^3}}$ 가 유리수가 되게 하는 최소의 자연수 $n = 6$ 이다.

2. $\sqrt{\frac{180}{a}}$ 가 자연수가 되게 하는 정수 a 는 모두 몇 개인가?

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$$\sqrt{\frac{180}{a}} = \sqrt{\frac{2^2 \times 3^2 \times 5}{a}}$$

$a = 5, 5 \times 2^2, 5 \times 3^2, 5 \times 2^2 \times 3^2$ 이므로 4 개이다.

3. n 이 양의 정수일 때, $\sqrt{72n}$ 이 정수가 되도록 하는 가장 작은 두 자리의 수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 18$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{72n} &= \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times n} \\ &= \sqrt{(2 \times 3)^2 \times 2 \times n}\end{aligned}$$

$$\therefore n = 2 \times 3^2 = 18$$

4. n 이 자연수이고, $1 < n < 20$ 일 때, $\sqrt{3n}$ 이 자연수가 되는 n 의 값들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\sqrt{3n}$ 에서 $n = 3 \times k^2$ 이므로 $n = 3, 12$
따라서 n 의 값들의 합은 15 이다.

5. $\sqrt{25}$ 의 양의 제곱근을 a , $\sqrt{81}$ 의 음의 제곱근을 b , $\sqrt{(-169)^2}$ 의 음의 제곱근을 c 라 할 때, $bc - \sqrt{5}a$ 의 제곱근을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\pm \sqrt{34}$

해설

$$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5 \text{의 제곱근은 } \pm \sqrt{5} \therefore a = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9 \text{의 제곱근은 } \pm 3 \therefore b = -3$$

$$\sqrt{(-169)^2} = 169 \text{의 제곱근은 } \pm 13 \therefore c = -13$$

$$bc - \sqrt{5}a = (-3) \times (-13) - \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 34 \text{ 이므로}$$

34의 제곱근은 $\pm \sqrt{34}$ 이다.

6. $a^2 = 8$ 이라고 할 때, a 의 값으로 옳은 것은?

① $2\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2}$

③ $\pm 2\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ $\pm 4\sqrt{2}$

해설

a 는 8 의 제곱근이므로 $\pm 2\sqrt{2}$ 이다.

7. $(-\sqrt{0.9})^2 - (-\sqrt{(0.4)^2})$ 을 계산하면?

① 0.1

② 0.4

③ 0.5

④ 1.1

⑤ 1.3

해설

$$(\text{준식}) = 0.9 + 0.4 = 1.3$$

8. $\sqrt{81}$ 의 양의 제곱근을 a , $(-4)^2$ 의 음의 제곱근을 b 라고 할 때, $a - b$ 의 값은?

① -7

② -1

③ 1

④ 7

⑤ 13

해설

$\sqrt{81} = 9$ 의 제곱근은 ± 3 이므로 양의 제곱근 $a = 3$

$(-4)^2 = 16$ 의 제곱근은 ± 4 이므로 음의 제곱근 $b = -4$

$\therefore a - b = 3 - (-4) = 7$

9. $\sqrt{x^2 + 35} = y$ 이고, x, y 는 자연수일 때, y 의 값을 모두 구하면?

① 6

② 9

③ 14

④ 18

⑤ 20

해설

$$\sqrt{x^2 + 35} = y$$

$$x^2 = 1 \text{ 일 때 } y = 6$$

$$x^2 = 289 \text{ 일 때 } y = 18$$

10. 다음 5 개의 수 A, B, C, D, E 가 정수가 되는 수 중 가장 작은 자연 수를 a, b, c, d, e 라 한다. 다음 중 옳은 것은?

$$A = \sqrt{4+a}, \quad B = \sqrt{5^2+b}$$

$$C = \sqrt{5^2 \times 3^3 \times c}, \quad D = \sqrt{160+2d}$$

- ① $a < b < c < d$ ② $a < c < b < d$ ③ $b < a < d < c$
- ④ $c < d < a < b$ ⑤ $c < a < b < d$

해설

정수가 되려면 근호 안의 수가 제곱수가 되어야 한다.

A 에서 $4+a = 9$ 일 때 a 가 가장 작은 수이면서 제곱수를 만든다.

$$\therefore a = 5$$

B 에서 $5^2 + b = 36$ 일 때 b 가 가장 작은 수이면서 제곱수를 만든다.

$$\therefore b = 11$$

C 에서 $5^2 \times 3^3 \times c$ 가 제곱수가 되려면 가장 작은 수는 $c = 3$ 일 때 이다.

D 에서 $160 + 2d = 196 (= 14^2)$ 일 때 d 가 가장 작은 수이면서 근호 안이 제곱수가 된다.

$$\therefore d = 18$$

$$\therefore c < a < b < d$$

11. $\sqrt{36+2x}=y$ 라 할 때, y 가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 x 와 그때의 y 의 곱 xy 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 112

해설

$$\sqrt{36+2x} = \sqrt{49}, \quad \therefore x = \frac{13}{2} \text{ (자연수가 아니다.)}$$

$$\sqrt{36+2x} = \sqrt{64}, \quad \therefore x = 14, \quad y = 8$$

따라서 $xy = 14 \times 8 = 112$ 이다.

12. $2x - y = 3$ 일 때, $\sqrt{2x + y}$ 가 자연수가 되게 만드는 가장 작은 두 자리 자연수 x 는?

① 10

② 13

③ 16

④ 19

⑤ 22

해설

$$2x - y = 3 \Rightarrow y = 2x - 3$$

$$\sqrt{2x + y} = \sqrt{2x + 2x - 3} = \sqrt{4x - 3}$$

x 는 최소한 가장 작은 두자리 수인 10 이상이어야 하므로,
근호 안의 제곱수는 7^2 이상이 되어야 한다. ($\sqrt{4 \times 10 - 3} = \sqrt{37} > 7^2$)

$\therefore \sqrt{4x - 3} = 7$ 일 때, $x = 13$ 이므로 성립한다.

$$\therefore x = 13$$

13. $\sqrt{960 - 32a}$ 가 정수가 되도록 하는 자연수 a 중에서 가장 큰 값을 M , 가장 작은 값을 m 이라고 할 때, $M - 2m$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 4

④ 6

⑤ 8

해설

$$\sqrt{960 - 32a} = \sqrt{16(60 - 2a)} = 4\sqrt{60 - 2a}$$

$60 - 2a = 0$ 일 때, a 는 최대

$60 - 2a = 36$ 일 때, a 는 최소

$$M = \frac{60}{2} = 30, m = \frac{60 - 36}{2} = 12$$

$$M - 2m = 30 - 2 \times 12 = 6$$

14. $5x+y=15$ 일 때, $\sqrt{2x+y}$ 가 자연수가 되게 만드는 가장 작은 자연수 x 는?

① 1

② 2

③ 4

④ 7

⑤ 9

해설

$$5x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - 5x$$

$$\sqrt{2x+y} = \sqrt{2x+15-5x} = \sqrt{15-3x}$$

x 가 가장 작은 자연수가 되려면 근호 안의 수는 15 미만의 가장 큰 제곱수가 되어야 하므로 9가 되어야 한다.

$$\sqrt{15-3x} = \sqrt{9}$$

$$15-3x = 9$$

$$\therefore x = 2$$

15. $\sqrt{891 - 81a}$ 가 자연수일 때, 자연수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

해설

$\sqrt{891 - 81a}$ 에서

$891 - 81a = 81(11 - a)$ 이다.

$\sqrt{81(11-a)} = 9\sqrt{11-a}$ 이다.

$\sqrt{11-a}$ 의 값이 제곱수가 되어야 하므로

$$11 - a = 1 \Rightarrow a = 10$$

$$11 - a = 4 \Rightarrow a = 7$$

$$11 - a = 9 \Rightarrow a = 2$$

따라서 $a = 10, 7, 2$ 이므로 자연수 a 값의 합은 $10 + 7 + 2 = 19$ 이다.

16. 다음 중 $\sqrt{35-x}$ 가 자연수가 되게 하는 자연수 x 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 10

해설

① $\sqrt{35-1} = \sqrt{34}$ 이고 34 는 제곱수가 아니므로 자연수가 되지 않는다.

② $\sqrt{35-3} = \sqrt{32}$ 이고 32 는 제곱수가 아니므로 자연수가 되지 않는다.

③ $\sqrt{35-5} = \sqrt{30}$ 이고 30 은 제곱수가 아니므로 자연수가 되지 않는다.

④ $\sqrt{35-7} = \sqrt{28}$ 이고 28 는 제곱수가 아니므로 자연수가 되지 않는다.

⑤ $\sqrt{35-10} = \sqrt{25}$ 이고 $25 = 5^2$ 이므로 자연수 5 가 된다.

17. $\sqrt{180 - 18a}$ 가 자연수가 되도록 하는 자연수 a 중에서 가장 큰 값을 M , 가장 작은 값을 m 이라고 할 때, Mm 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\sqrt{180 - 18a} = \sqrt{18(10 - a)} = 3\sqrt{2} \times \sqrt{10 - a}$$

$\sqrt{10 - a} = \sqrt{2}$ 일 때, a 가 가장 큰 값을 가지므로

$$a = 8$$

$\sqrt{10 - a} = \sqrt{8}$ 일 때, a 가 가장 작은 값을 가지므로

$$a = 2$$

$M = 8$, $m = 2$ 이다.

따라서 $Mm = 16$ 이다.

18. $\sqrt{144-x} - \sqrt{25+y}$ 가 가장 큰 자연수가 되게 하는 자연수 x, y 에 대하여 xy 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 253

해설

$\sqrt{144-x} - \sqrt{25+y}$ 가 가장 큰 자연수가 되려면
 $\sqrt{144-x}$ 는 최댓값, $\sqrt{25+y}$ 는 최솟값을 가져야 한다.
 $\sqrt{144}(=12) > \sqrt{144-x}$ 이므로
 $\sqrt{144-x}=11$ 일 때, 최댓값을 갖는다.
 $144-x=11^2$ 에서 $x=23$
또, $\sqrt{25}(=5) < \sqrt{25+y}$ 이므로
 $\sqrt{25+y}=6$ 일 때, 최솟값을 갖는다.
 $25+y=6^2$ 에서 $y=11$
 $\therefore xy = 23 \times 11 = 253$

19. $3x - y = 12$ 일 때, $\sqrt{5x + y}$ 가 자연수가 되게 만드는 가장 작은 자연수 x 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$3x - y = 12 \Rightarrow y = 3x - 12$$

$$\sqrt{5x + y} = \sqrt{5x + 3x - 12} = \sqrt{8x - 12}$$

$$\sqrt{8x - 12} = 1 \Rightarrow 8x - 12 = 1, x = \frac{13}{8}$$

(x 는 자연수가 아니다.)

$$\sqrt{8x - 12} = 2 \Rightarrow 8x - 12 = 4, x = 2$$

따라서 $x = 2$ 이다.

20. $\sqrt{31-x}$ 가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 6$

해설

31 보다 작은 제곱수는 1, 4, 9, 16, 25

$$\sqrt{31-x} = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore x = 6$$

21. $\frac{40^8}{100^4} = \sqrt{16^a}$, $\sqrt{\frac{9^8}{9^4}} = b$ 일 때, $10a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $10a - b = -1$

해설

$$\frac{40^8}{100^4} = \sqrt{16^a},$$

$$\frac{40^8}{100^4} = \frac{2^{24} \times 5^8}{2^8 \times 5^8} = 2^{16} = \sqrt{2^{32}} = \sqrt{16^8}$$

$$\therefore a = 8$$

$$\sqrt{\frac{9^8}{9^4}} = b, \sqrt{9^4} = 9^2 = 81 \quad \therefore b = 81$$

$$\therefore 10a - b = 80 - 81 = -1$$

22. 다음 식의 계산 중 바르지 못한 것은?

① $\sqrt{5^2} \times \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = 3$

② $\sqrt{0.04} \div \sqrt{10000} = 200$

③ $-\sqrt{49} + (\sqrt{13})^2 = 6$

④ $\sqrt{10^2} - \sqrt{(-9)^2} = 1$

⑤ $\sqrt{(-20)^2} - \sqrt{400} = 0$

해설

② $\sqrt{0.04} \div \sqrt{10000} = 0.002$

23. $A = \sqrt{81} - \sqrt{(-3)^2} - (-\sqrt{2})^2$, $B = \sqrt{50} - (-\sqrt{3})^2 - \frac{10}{\sqrt{2}}$ 일 때, $\frac{10B}{A}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7.5

해설

$$A = \sqrt{81} - \sqrt{(-3)^2} - (-\sqrt{2})^2 = 9 - 3 - 2 = 4$$

$$B = \sqrt{50} - (-\sqrt{3})^2 - \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} - 3 - 5\sqrt{2} = -3$$

따라서 $\frac{10B}{A} = -\frac{30}{4} = -7.5$ 이다.

24. 81 의 양의 제곱근을 x , 25 의 음의 제곱근을 y 라고 할 때, $x \times y, x - y, -\frac{x}{y}, x + y$ 의 대소를 비교하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x \times y < -\frac{x}{y} < x + y < x - y$

해설

81 의 양의 제곱근 = 9

25 의 음의 제곱근 = -5

$$x \times y = -45, x - y = 14, -\frac{x}{y} = \frac{9}{5}, x + y = 4$$

25. $a < 0$ 일 때, $A = \sqrt{(-3a)^2} \times (-\sqrt{a})^2 \div \sqrt{4a^2} \div \sqrt{(-5a)^2}$ 일 때, $10A$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $10A = 3$

해설

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(-3a)^2} \times (-\sqrt{a})^2 \div \sqrt{4a^2} \div \sqrt{(-5a)^2} \\ &= |-3a| \times |a| \div |2a| \div |-5a| \\ &= (-3a) \times (-a) \div (-2a) \div (-5a) = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

따라서 $10A = 10 \times \frac{3}{10} = 3$ 이다.

26. $a < 0$ 일 때, $\sqrt{(2a)^2} - \sqrt{(-a)^2}$ 을 간단히 하면?

① $3a$

② $-3a$

③ a

④ $-a$

⑤ $5a$

해설

$2a < 0, -a > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} & \sqrt{(2a)^2} - \sqrt{(-a)^2} \\ &= -2a - (-a) = -2a + a = -a \end{aligned}$$

27. $a < 0$ 일 때, $3\sqrt{(-a)^2} - \sqrt{(-2a)^2} + \sqrt{16a^2}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-5a$

해설

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{(-a)^2} - \sqrt{(-2a)^2} + \sqrt{16a^2} \\ &= 3\sqrt{a^2} - \sqrt{4a^2} + \sqrt{16a^2} \\ &= 3|a| - |2a| + |4a| \\ &= -3a - (-2a) - 4a = -5a \end{aligned}$$

28. $a > 0$ 일 때, $\sqrt{(-2a)^2} - \sqrt{9a^2}$ 을 간단히 하면?

① $-11a$

② $-7a$

③ $-5a$

④ $-a$

⑤ a

해설

$$\sqrt{4a^2} - \sqrt{9a^2} = 2a - 3a = -a$$

29. $2 < \sqrt{a+2b} < 3$ 을 만족하는 순서쌍 (a, b) 는 모두 몇 개인지 구하여라. (단, a, b 는 자연수, $a \neq b$)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 9 개

해설

$$2 < \sqrt{a+2b} < 3, \quad \sqrt{4} < \sqrt{a+2b} < \sqrt{9}$$

$$a+2b = 5, 6, 7, 8$$

$$(a, b) = (1, 2), (3, 1), (4, 1), (1, 3), (3, 2),$$

$$(5, 1), (2, 3), (4, 2), (6, 1)$$

따라서 9개이다.

30. 부등식 $\sqrt{3} < x < \sqrt{30}$ 을 만족하는 자연수 x 가 아닌 것은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$\sqrt{3} < x < \sqrt{30} \Rightarrow 3 < x^2 < 30$$

3 과 30 사이에서 완전제곱수는 4, 9, 16, 25

$$\therefore x = 2, 3, 4, 5$$

31. $2.3 < \sqrt{x} < 3.4$ 를 만족하는 자연수 x 의 값 중에서 가장 큰 수를 a , 가장 작은 수를 b 라고 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$$2.3 = \sqrt{5.29}, 3.4 = \sqrt{11.56} \text{ 이므로}$$

$$5.29 < x < 11.56$$

$$a = 11, b = 6$$

$$\therefore a + b = 11 + 6 = 17$$

32. $7 < \sqrt{3n} < 9$ 를 만족하는 자연수 n 의 값 중에서 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a - b$ 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$7 < \sqrt{3n} < 9$$

$$49 < 3n < 81$$

$$\frac{49}{3} < n < 27$$

$$\therefore a = 26, b = 17$$