1. $1 < \sqrt{\frac{x}{3}} < \frac{7}{3}$ 을 만족시키는 정수 x 중에서 가장 큰 수를 a , 가장 작은 수를 b 라고 할 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$3 < x < \frac{49}{3}$ 에서 $a = 16$, $b = 4$ 이다.

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{16} + \sqrt{4} = 6$

2. 다음 보기에서 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

보기

㉠ x 가 양수 a 의 제곱근이면, $a = \pm\sqrt{x}$ 이다.

㉡ x 가 제곱근 9 이면 $x = 3$ 이다.

㉢ 7.5 의 제곱근은 존재하지 않는다.

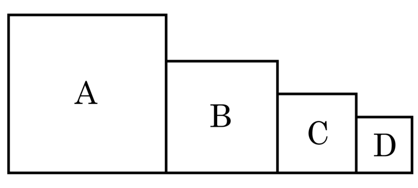
㉣ $-\frac{7}{4}$ 의 제곱근은 $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ 이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉢ ③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉠, ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ x 가 양수 a 의 제곱근이면, $x = \pm\sqrt{a}$ 이다.
㉢ 7.5 의 제곱근은 $\pm\sqrt{7.5}$ 이다.
㉣ $-\frac{7}{4}$ 은 음수이므로 제곱근은 존재하지 않는다.

3. 다음 그림에서 사각형 A, B, C, D 는 모두 정사각형이다. C 의 넓이는 D 의 넓이의 2 배, B 의 넓이는 C 의 넓이의 2 배, A 의 넓이는 B 의 넓이의 2 배인 관계가 있다고 한다. A 의 넓이가 4 cm^2 일 때, D 의 한 변의 길이는?



① $\frac{1}{4}$ cm　② $\frac{1}{2}$ cm　③ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ cm
④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ cm　⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm

해설

$(\text{B의 넓이}) = \frac{1}{2} \times (\text{A의 넓이})$

$(\text{C의 넓이}) = \frac{1}{2} \times (\text{B의 넓이}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times (\text{A의 넓이})$

$(\text{D의 넓이}) = \frac{1}{2} \times (C\text{의 넓이})$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times (A\text{의 넓이})$

A 의 넓이가 4 cm^2 이므로

$(\text{D의 넓이}) = \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2}$

따라서 $(\text{D의 넓이}) = (\text{한 변의 길이})^2 = \frac{1}{2}(cm^2)$ 이므로

$(\text{한 변의 길이}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(cm)$ 이다.

4. $a < 0$ 일 때, $\sqrt{81a^2} \div (-\sqrt{3a})^2 + \sqrt{(-0.5a)^2} \times \left(\sqrt{\frac{1}{5}a}\right)^2$ 을 계산하면?

① $0.1a^2 - 3$　② $0.1a^2 + 3$　③ $0.5a^2 - 3$
④ $0.5a^2 + 3$　⑤ $a^2 - 3$

해설

$\sqrt{81a^2} \div (-\sqrt{3a})^2 + \sqrt{(-0.5a)^2} \times \left(\sqrt{\frac{1}{5}a}\right)^2$

$= -9a \times \left(-\frac{1}{3a}\right) + (-0.5a) \times \left(-\frac{1}{5}a\right)$

$= 3 + 0.1a^2$

5. $0 < a < 1$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것은 몇 개인가?

보기

㉠ $a < \sqrt{a}$	㉡ $a < \frac{1}{a}$
㉢ $\sqrt{a^2} = a$	㉣ $\frac{1}{a} < \sqrt{a}$

① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$0 < a < 1$ 이므로 $a = \frac{1}{4}$ 라고 생각하고 대입하면

㉠ $\frac{1}{4} < \sqrt{\frac{1}{4}}\left(= \frac{1}{2}\right)$ (○)

㉡ $\frac{1}{4} < \frac{1}{\frac{1}{4}}(= 4)$ (○)

㉢ $a > 0$ 이므로 $\sqrt{a^2} = a$ (○)

㉣ $\frac{1}{\frac{1}{4}}(= 4) > \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ (×)

∴㉠, ㉡, ㉢

6. $\sqrt{57+x} = 4\sqrt{5}$ 일 때, 양수 x 값은?

① 32 ② 23 ③ 11 ④ 9 ⑤ 3

해설

$4\sqrt{5} = \sqrt{80}$

$\sqrt{80} = \sqrt{57+x}$ 이므로 $x = 23$ 이다.

7. $\sqrt{0.96}$ 은 $\sqrt{6}$ 의 x 배이다. 이 때, x 의 값은?

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{8}{5}$　④ $\frac{12}{5}$　⑤ $\frac{16}{5}$

해설

$\sqrt{0.96} = \sqrt{\frac{96}{100}} = \sqrt{\frac{4^2\times 6}{10^2}} = \frac{4}{10}\sqrt{6} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$

$\therefore\ x = \frac{2}{5}$

8. $\sqrt{3} = a$, $\sqrt{30} = b$ 일 때, $\sqrt{300}$ 의 값을 x , $\sqrt{0.3}$ 의 값을 y 라고 한다. x 와 y 를 a, b 를 이용하여 나타내면?

① $x = 100a$, $y = 10b$

② $x = 10a$, $y = \frac{b}{10}$

③ $x = 100b$, $y = \frac{a}{100}$

④ $x = 10a$, $y = \frac{b}{100}$

⑤ $x = 10ab$, $y = \frac{10}{b}$

해설

$\sqrt{300} = \sqrt{3 \times 100} = 10\sqrt{3} = 10a$

$\therefore x = 10a$

$\sqrt{0.3} = \sqrt{\frac{30}{100}} = \frac{\sqrt{30}}{10} = \frac{b}{10}$

$\therefore y = \frac{b}{10}$

9. $6\sqrt{12} \times 2\sqrt{3} \div 9\sqrt{2} = 32\sqrt{6} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \div A$ 일 때, A 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $A = 12$

해설

좌변 : $6\sqrt{12} \times 2\sqrt{3} \div 9\sqrt{2} = \dfrac{12\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}}{9\sqrt{2}}$

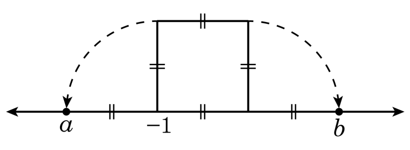
$= \dfrac{8}{\sqrt{2}}$

우변 : $32\sqrt{6} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \div A = 48\sqrt{2} \div A$

$\therefore\ 48\sqrt{2} \div A = \dfrac{8}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ A = 48\sqrt{2} \div \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 48\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{8} = 12$

10. 다음 그림의 사각형은 넓이가 3 인 정사각형이다. 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?



① 정사각형 한 변의 길이는 $\sqrt{3}$ 이다.

② b 에 대응하는 실수는 $-1+2\sqrt{3}$ 이다.

③ $\dfrac{b-a}{\sqrt{2}}$ 의 값은 $-\sqrt{2}$ 이다.

④ a 에 대응하는 실수는 $-1-\sqrt{3}$ 이다.

⑤ 대각선의 길이는 $\sqrt{6}$ 이다.

해설

넓이가 3 인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{3}$

$a=-1-\sqrt{3}$, $b=-1+2\sqrt{3}$

$$\frac{b-a}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-1+2\sqrt{3}-(-1-\sqrt{3})\right\}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

11. 세 실수 $A = \sqrt{20} + \sqrt{80}$, $B = \sqrt{21} + \sqrt{79}$, $C = \sqrt{22} + \sqrt{78}$ 의 대소 관계가 바르게 된 것은?

① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

A, B, C 가 모두 양수이므로 A^2, B^2, C^2 을 구해서 비교해도 좋다.

$$A^2 = \left(\sqrt{20} + \sqrt{80}\right)^2 = 20 + 2\sqrt{20 \times 80} + 80 = 100 + 2\sqrt{1600}$$

$$B^2 = (\sqrt{21} + \sqrt{79})^2 = 21 + 2\sqrt{21 \times 79} + 79 = 100 + 2\sqrt{1659}$$

$$C^2 = (\sqrt{22} + \sqrt{78})^2 = 22 + 2\sqrt{22 \times 78} + 78 = 100 + 2\sqrt{1716}$$

$\sqrt{1600} < \sqrt{1659} < \sqrt{1716}$ 이므로 $A^2 < B^2 < C^2$

$\therefore A < B < C$

12. $a,\ b,\ c$ 가 $a>0$, $b>0$, $c>0$ 이고, $c>b>a$ 일 때, $\sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{(b-c)^2}-\sqrt{(c-a)^2}$ 을 간단히 하면?

① $a+b+c$ ② $a-b-c$ ③ $2b-2c$

④ 0 ⑤ $2a-2b$

해설

$a-b<0,\ b-c<0,\ c-a>0$ 이므로

$\sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{(b-c)^2}-\sqrt{(c-a)^2}$

$=-(a-b)-\{-(b-c)\}-(c-a)$

$=-a+b+b-c-c+a$

$=2b-2c$

13. 두 자연수 x, y 에 대하여 $\sqrt{120xy}$ 가 가장 작은 정수가 되도록 x, y 의 값을 정할 때, 다음 중 x 의 값이 될 수 없는 것은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\sqrt{120xy} = \sqrt{2^3 \times 3 \times 5 \times xy} = 2\sqrt{30xy}$

$xy = 30$

$(x,\ y) = (1,\ 30),\ (2,\ 15),\ (3,\ 10),\ (5,\ 6),$
$(6,\ 5),\ (10,\ 3),\ (15,\ 2),\ (30,\ 1)$

14. $\sqrt{59+a}=b$ 라 할 때, b가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 a 와 그 때의 b의 합 $a+b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

59 보다 큰 제곱수는 $64, 81, 100, \cdots$ 이므로
$59+a=64, 81, 100\cdots$
$\therefore a=5, 22, 41, \cdots$
따라서 가장 작은 자연수 $a=5$, $b=\sqrt{59+5}=8$ 이다.
$\therefore a+b=5+8=13$

15. 자연수 a, b에 대해서 $\sqrt{49-a}+\sqrt{196+b}$ 가 자연수가 될 때, $10a-b$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 519

해설

$\sqrt{49-a}+\sqrt{196+b}$ 이 자연수가 되려면 $49-a$, $196+b$가 각각 완전제곱수가 되어야 한다.
또한 $10a-b$가 최댓값이 되려면 a는 최댓값, b는 최솟값이어야 한다.
$\sqrt{49-a}$가 0보다 크거나 같은 정수가 되는 a의 최댓값은 $a=49$ 이다.
$\sqrt{196+b}$가 자연수가 되는 b의 최솟값은 $b=29$ 이다.
따라서 $10a+b=490+29=519$ 이다.

16. $-1 < x < y < 0$ 일 때, 다음 중 1 보다 큰 수를 고르면?

① $\sqrt{xy}$ ② $\sqrt{-\frac{y^2}{x}}$ ③ $\sqrt{-\frac{y}{x^2}}$

④ $\sqrt{-x^2y}$ ⑤ $\sqrt{-xy^2}$

해설

$-1 < x < y < 0$ 이므로 $xy < 1$ 이고 $\frac{y}{x} < 1$, $\frac{x}{y} > 1$

① $\sqrt{xy} < 1$

② $\sqrt{-\frac{y^2}{x}} < \sqrt{-y} < 1$

③ $\frac{x}{y} > 1, -\frac{1}{y} > 1$ 이므로 $\sqrt{-\frac{x}{y^2}} > 1$

④ $\sqrt{-x} < 1$ 이므로 양변에 $\sqrt{xy}$ 를 곱하면 $\sqrt{-x^2y} < \sqrt{xy} < 1$

⑤ $\sqrt{-y} < 1$ 이므로 양변에 $\sqrt{xy}$ 를 곱하면 $\sqrt{-x^2y} < \sqrt{xy} < 1$

따라서 1 보다 큰 것은 ③뿐이다.

17. 유리수 a 와 무리수 b 가 $a>0$, $b>0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $b\sqrt{a}$ 는 항상 무리수이다.

② $\dfrac{b}{\sqrt{a}}$ 는 항상 유리수이다.

③ $b-a$ 는 항상 무리수이다.

④ ab 는 항상 무리수이다.

⑤ $b-\sqrt{a}$ 는 유리수일 수도 있고, 무리수일 수도 있다.

해설

$a=2$, $b=\sqrt{2}$ 라 하면

① $b\sqrt{a}=2$ 유리수이지만 $a=1$, $b=\sqrt{3}$ 일 때는 무리수

② $\dfrac{b}{\sqrt{a}}=1$ 유리수이지만 $a=1$, $b=\sqrt{3}$ 일 때는 무리수

③ $b-a=\sqrt{2}-2$ 항상 무리수

④ $ab=2\sqrt{2}$ 항상 무리수

⑤ $b-\sqrt{a}=0$ 유리수이지만 $a=1$, $b=\sqrt{3}$ 일 때는 무리수

따라서 옳은 것은 ③, ④, ⑤이다.

18. 한 변의 길이가 9인 정사각형의 내부에 10 개의 점을 놓을 때, 두 점 사이의 거리가 r 이하인 두 점이 반드시 존재한다. 이때 r의 최댓값을 구하여라.

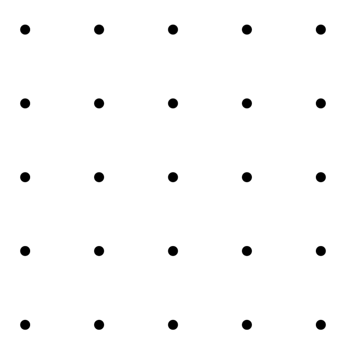
▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{2}$

해설

한 변의 길이가 9인 정사각형의 내부를 한 변의 길이가 3인 작은 정사각형 9개로 나누고
작은 정사각형 한 개안에 하나의 점을 놓는다고 할 때,
모두 10개의 점을 놓아야 하므로 반드시 2개의 점은 한 개의 작은 정사각형 안에 들어간다.
한 변의 길이가 3인 작은 정사각형 안에 2개의 점을 놓을 때
두 점 사이의 거리의 최댓값은 작은 정사각형의 대각선의 길이이므로 $3\sqrt{2}$ 이므로
$r = 3\sqrt{2}$

19. 다음 그림과 같이 가로, 세로 각각 $\sqrt{2}$cm 간격으로 25 개의 점이 정사각형 모양으로 나열되어 있다. 이들 점 중에서 4 개의 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그릴 때, 넓이가 10cm^2 인 정사각형의 개수를 구하여라.

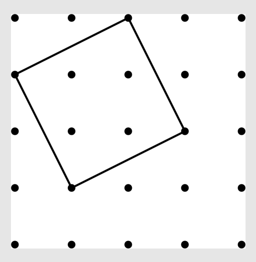


▶ 답: 개

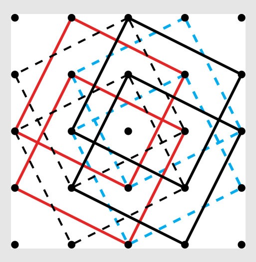
▷ 정답: 8 개

해설

주어진 점들의 간격이 1 인 경우 다음 정사각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$cm 이므로 간격이 $\sqrt{2}$cm 라면 한 변의 길이는 $\sqrt{10}$cm 이다.



즉, 4 개의 점을 연결하여 넓이가 10cm^2 가 되는 도형을 찾아보면 아래와 같이 총 8 개이다.



20. 두 수 5 와 9 사이에 있는 무리수 중에서 $\sqrt{n}$ 의 꼴로 나타낼 수 있는 가장 큰 수를 $\sqrt{a}$, 가장 작은 수를 $\sqrt{b}$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값으로 알맞은 것을 고르면? (단, n 은 자연수)

① 98 ② 100 ③ 102 ④ 104 ⑤ 106

해설

$5=\sqrt{25}$,
$9=\sqrt{81}$,
$a=80$,
$b=26$,
$\therefore a+b=106$

21. 정육면체 A, B 의 겉넓이 비가 $4:9$ 이고, 두 정육면체의 부피의 합이 $280\,\text{cm}^3$ 일 때, A, B 의 한 모서리의 길이를 각각 구하여라.

▶ 답: ______ cm

▶ 답: ______ cm

▷ 정답: $A = 4$ cm

▷ 정답: $B = 6$ cm

해설

A, B 의 한 모서리의 길이를 각각 a cm, b cm 라고 하면
A, B 의 겉넓이의 비는 $6a^2 : 6b^2 = 4 : 9$ 이므로 $a : b = 2 : 3$
$\therefore b = \frac{3}{2}a$
A, B 의 부피의 합은 $a^3 + b^3 = 280$,
$a^3 + \left(\frac{3}{2}a\right)^3 = 280,\ a^3 = 64,$
$\therefore a = 4, b = 6$
따라서 A, B 의 한 모서리의 길이는 각각 4 cm, 6 cm 이다.

22. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$이고, $S(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(x)$이라고 한다. 100 이하의 자연수 n에 대하여 $S(n)$의 값이 자연수가 되는 n을 모두 고르면?

① 8　　② 15　　③ 35　　④ 50　　⑤ 99

해설

$S(n) = \left(\sqrt{2}-1\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right) + \dots + \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sqrt{n+1}-1$

① $n = 8$일 때, $S(n) = 3 - 1 = 2$

② $n = 15$일 때, $S(n) = 4 - 1 = 3$

③ $n = 35$일 때, $S(n) = 6 - 1 = 5$

④ $n = 50$일 때, $S(n) = \sqrt{51} - 1$

⑤ $n = 99$일 때, $S(n) = 10 - 1 = 9$

따라서 ①, ②, ③, ⑤가 답이다.

23. $a < 0,\ b < 0$ 이고, $ab = 9$ 일 때, $\dfrac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{a} + \dfrac{\sqrt{\frac{b}{a}}}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\dfrac{2}{3}$

해설

$a < 0,\ b < 0$ 이므로 $a = -\sqrt{a^2}, b = -\sqrt{b^2}$

$\dfrac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{a} + \dfrac{\sqrt{\frac{b}{a}}}{b}$

$= \dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \dfrac{1}{b}\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

$= \left(-\sqrt{\dfrac{1}{a^2}}\right)\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \left(-\sqrt{\dfrac{1}{b^2}}\right)\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

$= -\sqrt{\dfrac{1}{ab}} - \sqrt{\dfrac{1}{ab}} = -2\sqrt{\dfrac{1}{ab}}$

$= -2 \times \sqrt{\dfrac{1}{9}} = -\dfrac{2}{3}$

24. $f(a) = \sqrt{a+1} + \sqrt{a}$일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \cdots + \frac{1}{f(80)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\frac{1}{f(a)} = \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$$
$$= \frac{\sqrt{a+1} - \sqrt{a}}{(\sqrt{a+1} + \sqrt{a})(\sqrt{a+1} - \sqrt{a})}$$
$$= \frac{\sqrt{a+1} - \sqrt{a}}{a+1-a}$$
$= \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$ 이므로

(준식) $= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{81} - \sqrt{80})$

$= \sqrt{81} - \sqrt{1} = 9 - 1 = 8$

25. 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{n}$ 을 넘지 않는 최대 정수 부분을 $f(n)$ 으로 나타내고, $f(n) = 11$ 인 자연수 n 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $f\left(\frac{a-b}{3}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$f(n) = 11$ 이므로

$11 \le \sqrt{n} < 12$

$121 \le n < 144$

따라서 최댓값 $a = 143$, 최솟값 $b = 121$ 이다.

즉, $f\left(\frac{a-b}{3}\right) = f\left(\frac{22}{3}\right)$ 에서 $\sqrt{\frac{22}{3}}$ 를 넘지 않는 최대 정수는 2 이다.