

1. 두 자연수 a, b 가 있다. a 를 b 로 나누었더니 몫이 16 , 나머지가 3 이었다. 이때, a 를 4 로 나누었을 때의 나머지는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$a = b \times 16 + 3 = 4 \times b \times 4 + 3$ 이다. 따라서 나머지는 3 이다.

2. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 10 은 10 의 약수이면서 10 의 배수이다.
- ② 모든 자연수는 자기 자신의 약수인 동시에 배수이다.
- ③ 1 은 모든 자연수의 배수이다.
- ④ 384 은 6 의 배수이다.
- ⑤ 9 는 54 의 약수이다.

해설

1 은 모든 자연수의 약수이다.

3. 다음 중 거듭제곱의 표현으로 옳지 않은 것은?

① $3 \times 3 \times 3 = 3^3$

② $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

③ $a + a + a + a = a^4$

④ $a \times b \times b \times b \times b = a \times b^4$

⑤ $\frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7} = \frac{1}{2^3 \times 7^2}$

해설

③ $a + a + a + a = 4 \times a$

4. $2^4 = a$, $3^b = 27$ 을 만족하는 a, b 의 값을 각각 구하면?

① $a = 8$, $b = 2$

② $a = 8$, $b = 3$

③ $a = 16$, $b = 2$

④ $a = 16$, $b = 3$

⑤ $a = 32$, $b = 4$

해설

$2^4 = 16$, $3^3 = 27$ 이므로 $a = 16$, $b = 3$ 이다.

5. 다음 중 소수는 모두 몇 개인지 구하여라.

47, 53, 65, 97, 117, 153

▶ 답 : 3 개

▷ 정답 : 3 개

해설

47 의 약수 : 1, 47
53 의 약수 : 1, 53
65 의 약수 : 1, 5, 13, 65
97 의 약수 : 1, 97
117 의 약수 : 1, 3, 9, 13, 39, 117
153 의 약수 : 1, 3, 9, 17, 51, 153
이므로 소수는 47, 53, 97 의 3 개이다.

6. 다음 중 옳은 것을 골라라.

- ㉠ 1은 소수이다.

㉡ 2는 소수가 아니다.

㉢ 짝수인 소수는 2뿐이다.

㉤ 소수는 모두 홀수이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

- 해설

㉠ 1은 소수가 아니다.

㉡ 2는 소수이다.

㉢ 2는 소수이다.

7. 63를 소인수분해 한 것으로 옳은 것은?

① 7×9

② 2^6

③ $3^2 \times 7$

④ $2^2 \times 3 \times 5$

⑤ $2^6 \times 9$

해설

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 63} \\ 3 \overline{) 21} \\ 7 \end{array}$$

8. 75 에 가능한 한 작은 자연수 x 로 나누어서 어떤 자연수 y 의 제곱이 되게 하려고 한다. y 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 9

⑤ 15

해설

75 를 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 75} \\ 5 \overline{) 25} \\ 5 \end{array}$$

$75 = 3 \times 5^2$ 이므로 $\frac{3 \times 5^2}{x} = y^2$ 을 만족하는 x 의 값 중 가장 작은 자연수는 3 이다. 따라서 $y = 5$ 이다.

9. $2^3 \times 3^2 \times 5$ 에 어떤 자연수를 곱하여 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 곱할 수 있는 수 중에서 가장 작은 자연수는?

① 3 ② 5 ③ 3×5 ④ 5^2 ⑤ 10

해설

$$2^3 \times 3^2 \times 5$$

곱해야할 가장 작은 자연수는

$$2 \times 5 = 10$$

10. 1 부터 50 까지의 자연수 중에서 약수의 개수가 3 개인 자연수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 4 개

▷ 정답 : 4 개

해설

자연수 n 의 약수의 개수가 3 개이기 위해서는
1 과 n 이외에 약수가 한 개만 더 있어야하므로
자연수 n 은 소수의 완전제곱수이어야 한다.
따라서 1 부터 50 까지의 완전제곱수를 구하면
 $7^2 = 49 < 50$ 이고 $11^2 = 121 > 50$ 이므로
50 이하인 소수의 완전제곱수는
 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2$ 이다.

11. 24 를 어떤 자연수로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이때, 어떤 자연수는 모두 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

24 의 약수를 구하면 된다. 24 의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 이다. 따라서 8 개이다.

12. 10 이하의 자연수 중 약수의 개수가 3개 이상인 수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

약수의 개수가 3 개 미만인 수는 1 과 소수이다.

10 이하의 소수는 2,3,5,7 4개이므로 약수의 개수가 3개 이상인 수는 $10 - 4 - 1 = 5$ 개이다.

13. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?(정답 2 개)

- ① 15 이하의 소수는 모두 6 개이다.
- ② 7 은 소수이다.
- ③ 모든 소수는 홀수이다.
- ④ 자연수는 1, 소수, 합성수로 이루어져 있다.
- ⑤ 1 은 합성수이다.

해설

- ③ 2 는 소수이다.
- ⑤ 1 은 소수도 합성수도 아니다.

14. 다음은 골드바흐가 생각해 낸 소수에 관한 추측이다. 골드바흐의 추측을 가장 잘 설명하고 있는 식은?

보기

[골드바흐의 추측]

2 보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다.

① $7 = 3 + 4$

② $12 = 5 + 7$

③ $14 = 5 + 9$

④ $14 = 2 + 5 + 7$

⑤ $17 = 1 + 5 + 11$

해설

소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... 이므로 골드바흐의 추측을 가장 잘 설명한 것은 $12 = 5 + 7$ 이다.

15. 다음은 골드바흐가 생각해낸 소수에 관한 추측이다. 골드바흐의 추측을 설명한 것이 아닌 것은?

보기

[골드바흐의 추측]
2 보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다.

- ① $12 = 5 + 7$
- ② $14 = 3 + 11$
- ③ $16 = 5 + 11$
- ④ $18 = 7 + 11$
- ⑤ $20 = 9 + 11$

해설

소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... 이므로 골드바흐의 추측을 설명한 것이 아닌 것은 $20 = 9 + 11$ 이다.

16. 140 을 소인수분해하면 $2^a \times 5^b \times 7^c$ 일 때, 세 수 a, b, c 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 1$

▷ 정답 : $c = 1$

해설

140 을 소인수분해하면 $140 = 2^2 \times 5 \times 7$

17. 2160 를 소인수분해하면 $a^x \times b^y \times c^z$ 이다. $z < y < x$ 일 때, $a + b + c - (x + y + z)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5^1$ 이므로 $a = 2, b = 3, c = 5, x = 4, y = 3, z = 1$ 이다.

$\therefore a + b + c - (x + y + z) = 2 + 3 + 5 - (4 + 3 + 1) = 10 - 8 = 2$

18. 48에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

48을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 48} \\ 2 \overline{) 24} \\ 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \end{array}$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $2^4 \times 3 \times \square$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 $\square$ 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

19. $48 \times x = y^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

① 3

② 4

③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{1}{3}$

⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$$2^4 \times 3 \times x = y^2$$

가장 작은 $x = 3$,

$$2^4 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = y^2$$

$$y = 2^2 \times 3 = 12$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

20. 72를 x 로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되면서 3의 배수는 되지 않도록 할 때, 나눌 수 있는 가장 작은 자연수 x 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

$\frac{72}{x} = \frac{2^3 \times 3^2}{x}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 $x = 2, x = 2 \times 3^2, x = 2^3, x = 2^3 \times 3^2$ 이다.

3의 배수가 되지 않아야 하므로 $x = 2 \times 3^2, x = 2^3 \times 3^2$ 중 작은 자연수는 $x = 2 \times 3^2 = 18$ 이다.

21. x 는 96의 약수일 때, x 값이 될 수 없는 것은?

① 2

② 2×3

③ $2^2 \times 3$

④ 2×3^3

⑤ 2^5

해설

④ $96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^5 \times 3$ 이므로 2×3^3 은 96의 약수가 아니다.

22. 다음 중 약수의 개수가 가장 적은 것은?

① 2^{10}

② 2×3

③ $2^2 \times 3^3$

④ 3×5^2

⑤ 13^{11}

해설

각각의 약수의 개수를 구하면 다음과 같다.

① $10 + 1 = 11$ (개)

② $(1 + 1) \times (1 + 1) = 4$ (개)

③ $(2 + 1) \times (3 + 1) = 12$ (개)

④ $(1 + 1) \times (2 + 1) = 6$ (개)

⑤ $11 + 1 = 12$ (개)

23. 자연수 864 의 약수의 개수와 $2^2 \times 3 \times 5^n$ 의 약수가 개수가 같을 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$864 = 2^5 \times 3^3$ 이므로

약수의 개수는 $(5 + 1) \times (3 + 1) = 24$ (개)

$2^2 \times 3 \times 5^n$ 의 약수의 개수는

$(2 + 1) \times (1 + 1) \times (n + 1) = 6 \times (n + 1)$ (개)

$6 \times (n + 1) = 24$ 이므로 $n + 1 = 4$

$\therefore n = 3$

24. 어떤 자연수 n 에 대하여 $\frac{110}{2 \times n + 1}$ 이 자연수가 된다. 이러한 n 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

110의 약수를 구해보면 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110이다.

그 중 홀수는 1, 5, 11, 55이다.

$2 \times n + 1 = 1$ 에서 $\therefore n = 0$

$2 \times n + 1 = 5$ 에서 $\therefore n = 2$

$2 \times n + 1 = 11$ 에서 $\therefore n = 5$

$2 \times n + 1 = 55$ 에서 $\therefore n = 27$

따라서 자연수 n 의 합을 구하면 $2 + 5 + 27 = 34$

25. 네 자리의 정수 $41\square2$ 가 3 의 배수인 동시에 4 의 배수가 되도록 $\square$ 안에 알맞은 수는?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

3의 배수는 자리 수의 합이 3의 배수 이므로 $41\square2 \Rightarrow 4 + 1 + \square + 2 = 7 + \square$ 에서 $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수는 2, 5, 8 이다.
4의 배수는 마지막 두 자리가 4의 배수이어야 하므로 $41\square2 \Rightarrow \square2$ 에서
 $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9 이다.
따라서 동시에 만족하는 수는 5 이다.

26. 13 이하의 자연수의 곱을 소인수분해 했을 때 소인수의 합을 a , 소인수의 지수의 합을 b 라 하자. 이때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 13 \\ &= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \\ &\quad \times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \\ &= 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \\ &a = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 = 41 \\ &b = 10 + 5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 20 \\ &\therefore a - b = 41 - 20 = 21 \end{aligned}$$

27. $2 \times n$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{5}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것은?

- ① 100 ② 200 ③ 300 ④ 400 ⑤ 500

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $2 \times n$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2 가 두 번 곱해져 있고, $\frac{n}{5}$ 이 제곱이므로 n 은 5 가 세 번 곱해져 있다.

$$\therefore n = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$$

28. $2^a \times 3^b \times 11^c$ 이 132 를 약수로 가질 때, 세 자연수 a, b, c 의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

132 를 소인수분해하면 $132 = 2^2 \times 3 \times 11$ 이다. 한편 $2^a \times 3^b \times 11^c$ 이 132 를 약수로 가지므로 a 는 2 보다 크거나 같고, b 는 1 보다 크거나 같다. 또한 c 도 1 보다 크거나 같다.
따라서 a, b, c 의 최솟값은 각각 2, 1, 1 이므로 구하는 합은 $2 + 1 + 1 = 4$ 이다.

29. 504 의 약수의 개수와 $3^x \times 7^2 \times 13^y$ 의 약수의 개수가 같다고 한다. 이때, $x - y$ 의 값을 구하여라. (단, x, y 는 $x > y$ 인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ 이므로 약수의 개수가 같기 위해서는 $x = 3$, $y = 1$ 이어야 한다. ($\because x > y$)
 $\therefore x - y = 3 - 1 = 2$

30. $18 \times A \times 7^2$ 의 약수의 개수가 36 이라고 한다. 가장 작은 A 의 값을 a , 두 번째로 작은 A 의 값을 b 라고 할 때, $b - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$2 \times 3^2 \times 7^2 \times A$$

약수의 개수가 36 개이므로

A 가 될 수 있는 수는 $2^2, 3^3, 7^3$ 이거나 2, 3, 7 이외의 소수이다.

따라서 가장 작은 값은 $2^2 = 4$,

두 번째로 작은 값은 5

$$\therefore 5 - 4 = 1$$

31. 90보다 작은 자연수 x 에 대하여, x 를 17로 나눈 몫이 k 이면 나머지도 k 가 되는 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4개

해설

x 를 17로 나눈 몫이 k 이면 나머지도 k 가 되는 수는 $17k+k=18k$ 로 쓸 수 있다.
따라서 90보다 작은 수 중 18의 배수가 되는 수는 18, 36, 54, 72이다.
 $\therefore n(B)=4$

32. 200 의 소인수들의 합은?

① 6

② 7

③ 10

④ 12

⑤ 15

해설

$200 = 2^3 \times 5^2$ 이므로 소인수는 2, 5 이다.

$\therefore 2 + 5 = 7$

33. 960으로 나누면 나누어 떨어지고, 1 과 자기 자신을 포함한 양의 약수의 개수가 105 개인 최소의 자연수 n 의 값은?
- ① 123500 ② $2^7 \times 3^2 \times 5^2$ ③ 128000
- ④ $2^6 \times 3^3 \times 5$ ⑤ 129600

해설

$N = a^m b^n c^l \dots$ 에서 양의 약수의 개수는 $(m+1)(n+1)(l+1) \dots$ 이고, 약수의 개수가 $105 = 3 \times 5 \times 7$ (개) 이므로 m, n, l 의 값은 차례로 2, 4, 6 이다. 최소의 자연수를 구해야 하므로, a, b, c 의 값을 작은 소수부터 차례로 대입하고, 지수는 큰 수부터 차례로 대입하면 $N = 2^6 \times 3^4 \times 5^2$ 이고, 이 수는 $960 = 2^6 \times 3 \times 5$ 의 배수이므로 129600 이 답이 된다.