1. 세 수 x, y, z 의 평균과 분산이 각각 5, 4 일 때, $\frac{1}{5}x$, $\frac{1}{5}y$, $\frac{1}{5}z$ 의 평균과 분산을 차례대로 나열한 것은?

① $1,\ \frac{4}{5}$ ② $1,\ \frac{4}{25}$ ③ $2,\ \frac{1}{5}$ ④ $3,\ 4$ ⑤ $4,\ \frac{1}{5}$

해설

세 수 x, y, z 의 평균이 5 이므로

$\frac{x+y+z}{3}=5$

$\therefore x+y+z=15\ \cdots\cdots$ ㉠

또한, x, y, z 의 분산이 4 이므로

$\frac{(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2}{3}=4$

$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=12$

$x^2-10x+25+y^2-10y+25+z^2-10z+25=12$

$x^2+y^2+z^2-10(x+y+z)+75=12$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$x^2+y^2+z^2-10\times 15+75=12$

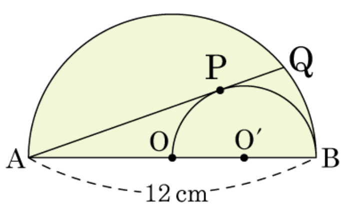
$\therefore x^2+y^2+z^2=87$

따라서 $\frac{1}{5}x$, $\frac{1}{5}y$, $\frac{1}{5}z$ 의 평균은 $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{5}+\frac{z}{5}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}(x+y+z)=1$ 이고, 분산은

$$\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{5}x-1\right)^2+\left(\frac{1}{5}y-1\right)^2+\left(\frac{1}{5}z-1\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{25}x^2-\frac{2}{5}x+1+\frac{1}{25}y^2-\frac{2}{5}y\right)+$$
$$\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{25}z^2-\frac{2}{5}z+1\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{25}(x^2+y^2+z^2)-\frac{2}{5}(x+y+z)+3\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{25}\times 87-\frac{2}{5}\times 15+3\right)$$
$$=\frac{4}{25}$$

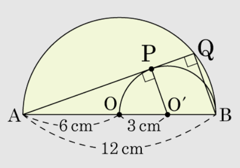
이다.

2. $\overline{AB} = 12\text{cm}$ 를 지름으로 하는 반원 O 안에 $\overline{OB}$ 를 지름으로 하는 반원 O′ 이 있다. $\overline{AQ}$ 가 반원 O′ 의 접선이며 점 P 가 접점이라 할 때, $\overline{AQ}$ 의 길이는?



① $6\sqrt{5}\text{cm}$ ② $6\sqrt{6}\text{cm}$ ③ $7\sqrt{5}\text{cm}$
④ $8\sqrt{2}\text{cm}$ ⑤ $8\sqrt{3}\text{cm}$

해설



$\overline{AO'}^2 + \overline{O'P}^2 = \overline{AP}^2$ 이므로
$9^2 = 3^2 + \overline{AP}^2 \therefore \overline{AP} = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$
$\angle APO' = 90°$, 지름에 대한 원주각인 $\angle Q = 90°$
$\therefore \triangle AO'P \backsim \triangle ABQ$
$\overline{AP} : \overline{AQ} = \overline{AO'} : \overline{AB}$
$6\sqrt{2} : \overline{AQ} = 9 : 12 = 3 : 4$
$\therefore \overline{AQ} = \dfrac{4}{3} \times 6\sqrt{2} = 8\sqrt{2}(\text{cm})$