1. 직선 $y = -2x + 4$ 에 평행하고, 한 점 $(2, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = \frac{1}{2}x + 1$　② $y = -2x - \frac{1}{2}$　③ $y = -2x - 2$
④ $y = -2x + 1$　⑤ $y = 2x - 1$

해설

두 직선이 평행하므로 기울기가 같고 구하고자 하는 직선의 기울기는 -2
따라서 기울기가 -2 이고, 한 점 $(2, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은
$y + 3 = -2(x - 2)$
$\therefore\ y = -2x + 1$

2. 두 점$(3,\ 2)$, $(3, 10)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $x = 2$　　② $x = 3$　　③ $x = 10$

④ $y = 3$　　⑤ $y = 10$

해설

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

ⅰ) $x_1 \neq x_2$일 때, $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

ⅱ) $x_1 = x_2$일 때, $x = x_1$

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$x_1 = x_2$ 일 때, $x = x_1$ 이므로

두 점 $(3,\ 2)$, $(3, 10)$을 지나는 직선의 방정식은

$\therefore x = 3$

3. 두 점 A $(-3,\ 6)$, B $(2,\ -3)$을 잇는 선분 AB가 x 축과 만나는 교점을 P라 할 때, 점 P의 좌표는?

① P $(1,\ 0)$　② P $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$　③ P $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$
④ P $\left(-\frac{1}{3},\ 0\right)$　⑤ P $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$

해설

$y-6=\frac{-3-6}{2-(-3)}(x+3)$, $y=-\frac{9}{5}x+\frac{3}{5}$

$\therefore y=0$ 일 때

$x=\frac{1}{3}$ 이므로 P $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$

4. 세 점 $(0,\ 2)$, $(3,\ 8)$, $(a,\ 3a)$ 가 일직선 위에 있을 때, 상수 a 의 값은?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 4

해설

세 점 $A(0,\ 2)$, $B(3,\ 8)$, $C(a,\ 3a)$ 로 놓으면

직선 AB 의 기울기 : $\frac{8-2}{3-0}=2$

직선 BC 의 기울기 : $\frac{3a-8}{a-3}$

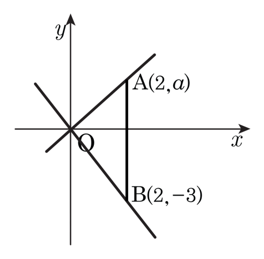
한편, 세 점 A, B, C 가 일직선 위에 있으므로

직선 AB 의 기울기와 직선 BC 의 기울기가 서로 같다.

$\frac{3a-8}{a-3}=2$, $3a-8=2a-6$

$\therefore a=2$

5. 다음 그림과 같이 원점과 점 A(2, a) 를 지나는 직선의 기울기를 m_1, 원점과 점 B(2, -3) 을 지나는 직선의 기울기를 m_2 라 하자. $m_1 \times m_2 = -1$ 일 때, a 의 값을 구하면?



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$m_1 = \frac{a}{2}$, $m_2 = -\frac{3}{2}$

$m_1 \times m_2 = \frac{a}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$ 이므로,

$\therefore\ a = \frac{4}{3}$

6. 세 직선 $l : y = -2x + 3, m : 4x - 2y + 1 = 0, n : x - 2y + 3 = 0$에 대하여 다음 보기 중 옳은 것은?

보기

㉠ $l // m$　　㉡ $m \perp n$　　㉢ $l \perp n$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢

④ ㉠.㉡　　⑤ ㉠.㉡.㉢

해설

$l : y = -2x + 3,\ m : 4x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + \frac{1}{2}$

$n : x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$에서

두 직선 l과 n의 기울기의 곱이

$(-2) \times \frac{1}{2} = -1$이므로

l과 n은 서로 수직이다.

즉, $l \perp n$ 한편, 기울기가 같은 직선은

없으므로 서로 평행한 직선은 없다.

따라서 옳은 것은 ㉢뿐이다

7. 다음은 두 직선 $x+y-2=0,\ mx-y+m+1=0$이 제 1사분면에서 만나도록 하는 상수 m의 값의 범위를 정하는 과정이다. 위의 안에 들어갈 것으로 옳지 않은 것은?

증명

$x+y-2=0 \cdots\cdots$ ㉠
$mx-y+m+1=0 \cdots\cdots$ ㉡
㉡을 m에 대하여 정리하면
$(x+1)m-(\boxed{\text{①}})=0$에서 이 직선은 m의 값에 관계없이 정점 $\boxed{\text{②}}$을 지난다.
(i) ㉡이 점 $(0,2)$를 지날 때, $m=\boxed{\text{③}}$
(ii) ㉡이 점 $(2,0)$를 지날 때, $m=\boxed{\text{④}}$
따라서, 두 직선이 제 1사분면에서 만나려면 (i), (ii)에서
$\boxed{\text{⑤}}$

① $y-1$　　② $(-1,1)$　　③ 1
④ $-\frac{1}{3}$　　⑤ $-\frac{1}{3}\le m\le 1$

해설

$x+y-2=0 \cdots\cdots$ ㉠
$mx-y+m+1=0 \cdots\cdots$ ㉡
㉡을 m에 대하여 정리하면
$(x+1)m-(\boxed{y-1})=0$에서 이 직선은 m의 값에 관계없이 정점 $\boxed{(-1,\ 1)}$을 지난다.
따라서 두 직선이 제 1사분면에서 만나려면
(i) ㉡이 점 $(0,\ 2)$를 지날 때, $m=\boxed{1}$
(ii) ㉡이 점 $(2,\ 0)$를 지날 때, $m=\boxed{-\frac{1}{3}}$
(i), (ii)에서 $\boxed{-\frac{1}{3}<m<1}$

8. 두 직선 $3x+2y+1=0,\ x+3y-2=0$의 교점과 직선 $3x-y+2=0$ 사이의 거리를 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{7}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ ③ $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

해설

$3x+2y+1=0\ \cdots\cdots$ ㉠

$x+3y-2=0\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠ $-$ ㉡ $\times 3$에서 $-7y+7=0$

$\therefore\ y=1,\ x=-1$

따라서, 교점의 좌표는 $(-1, 1)$이다.

점 $(-1, 1)$과 직선 $3x-y+2=0$

사이의 거리 d는

$$d=\frac{|3\times(-1)-1+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

9. 두 점 A$(-3, -2)$, B$(1, 1)$로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x+2y+3=0$
② $2x+y+3=0$
③ $4x-6y+15=0$
④ $4x+6y+7=0$
⑤ $8x+6y+11=0$

해설

P(x, y)라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$

즉, $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(x+3)^2+(y+2)^2=(x-1)^2+(y-1)^2$

$\therefore\ 8x+6y+11=0$

10. 중심이 $(2, -1)$ 이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원의 방정식은?

① $(x+2)^2+(y-1)^2=5$
② $(x+2)^2+(y-1)^2=\sqrt{5}$
③ $(x-2)^2+(y+1)^2=5$
④ $(x-2)^2+(y+1)^2=\sqrt{5}$
⑤ $(x-2)^2+(y+1)^2=5^2$

해설

중심이 $(2, -1)$, $r : \sqrt{5}$ 인 원
$\Rightarrow\ (x-2)^2+(y+1)^2=5$

11. 방정식 $2x^2+2y^2+4x-4y+3=0$ 은 원을 나타낸다. 반지름의 길이를 구하면?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 4 ③ $\sqrt{2}$ ④ 1 ⑤ 3

해설

$2x^2+2y^2+4x-4y+3=0$

$\Rightarrow \ 2(x^2+2x+1-1)+2(y^2-2y+1-1)+3=0$

$\Rightarrow \ 2(x+1)^2+2(y-1)^2=1$

$\Rightarrow \ (x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 반지름 길이 $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 방정식 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은? (단, a, b, c 는 모두 0 이 아니다.)

① $b^2-4c=0$
② $b^2+4c=0$
③ $a^2-4c=0$
④ $a^2+b^2-4c=0$
⑤ $a^2+b^2+4c=0$

해설

주어진 방정식과 y 축과의 교점을 구하려면,
주어진 방정식에 $x=0$ 을 대입하면 되므로
$y^2+by+c=0$ ⋯⋯ ㉠
원이 y 축과 접하려면 ㉠의
식이 중근을 가져야 하므로 판별식 $D=0$
$\therefore$ $D=b^2-4c=0$

13. 두 원 O_1, O_2의 중심거리가 $d=7$이고, 그 각각 반지름의 길이 r_1, r_2가 2, 5일 때, 두 원은 어떤 위치관계에 있는가?

① 외접한다.
② 내접한다.
③ 두 점에서 만난다.
④ 만나지 않는다.
⑤ 네 점에서 만난다.

해설

$d=r_1+r_2$ 이므로 두 원은 외접한다.

14. 두 원 $x^2+y^2-x+2y-3=0$, $2x^2+2y^2-6x+ay-2=0$ 의 공통현이 직선 $y=-3x-1$ 과 직교할 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$2(x^2+y^2-x+2y-3)-(2x^2+2y^2-6x+ay-2)=0$

즉, $4x+(4-a)y-4=0 \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠과 직선 $y=-3x-1$ 은 직교하므로

$\frac{-4}{4-a}\times(-3)=-1$ 에서 $a=16$

15. 다음은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 만나지 않을 때, k 의 값의 범위를 구하는 과정이다. (가), (나), (다) 에 들어갈 알맞은 것을 고르면?

> $x^2 + y^2 = 1 \cdots$ ㉠
> $y = 2x + k \cdots$ ㉡
> ㉡을 ㉠에 대입하여 식을 정리하면
> $5x^2 + 4kx + k^2 - 1 = 0 \cdots$ ㉢
> ㉠과 ㉡이 서로 만나지 않으려면
> $D = (4k)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (k^2 - 1)$
> (가)0
> k^2(나)5 $\quad \therefore$ (다)

① (가):> , (나):< , (다):$-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

② (가):= , (나):= , (다):$k = \pm\sqrt{5}$

③ (가):> , (나):< , (다):$-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

④ (가):> , (나):> , (다):$k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

⑤ (가):< , (나):> , (다):$k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

해설

(가): 원과 직선이 만나지 않으면 판별식이 0보다 작다.
(나): 판별식을 정리하면, $k^2 > 5$
(다): $k^2 - 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$