1. 다음 중 $\sqrt{5}$ 와 $\sqrt{10}$ 사이에 있는 무리수는?

① $\sqrt{5}-1$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}-2$

④ $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{10}}{2}$ ⑤ 4

해설

$$2\sqrt{5}=\sqrt{20},\ \ \sqrt{5}<\frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}}{2}<\sqrt{10}$$

2. $3\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} - \sqrt{72}$을 간단히 하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $-3\sqrt{2}$

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= \frac{3\sqrt{10}\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} - \sqrt{3\times3\times2\times2\times2} \\
&= \frac{3\times5\times\sqrt{2}}{5} - 6\sqrt{2} \\
&= 3\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\
&= -3\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

3. $\sqrt{2}(2\sqrt{3}-6)-\dfrac{2-4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=a\sqrt{2}+b\sqrt{6}$ 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -28

해설

$$\sqrt{2}(2\sqrt{3}-6)-\frac{2-4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$
$$=2\sqrt{6}-6\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}(2-4\sqrt{3})}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$$
$$=2\sqrt{6}-6\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{2}$$
$$=2\sqrt{6}-6\sqrt{2}-(\sqrt{2}-2\sqrt{6})$$
$$=2\sqrt{6}-6\sqrt{2}-\sqrt{2}+2\sqrt{6}$$
$$=-7\sqrt{2}+4\sqrt{6}$$
$$a=-7,\ b=4$$
$$\therefore\ ab=-28$$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$ 의 분모를 유리화할 때, 다음 중에서 어떤 수를 분모, 분자에 곱하면 가장 편리한가?

① $\sqrt{3}$　　② $2-\sqrt{3}$　　③ -2

④ $2+\sqrt{3}$　　⑤ $-2+\sqrt{3}$

해설

$$\frac{1}{\sqrt{3}+2}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$$

5. 이차방정식 $2x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$ 은?

① -9　　② -2　　③ 0　　④ 5　　⑤ 13

해설

$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-4=5$

6. $a < 0$ 일 때, $\sqrt{64a^2}$ 을 간단히 한 것으로 옳은 것을 고르면?

① $-64a^2$　　② $-8a$　　③ $8a$

④ $8a^2$　　⑤ $64a^2$

해설

$8a < 0$이므로

$\sqrt{64a^2} = \sqrt{(8a)^2} = -(8a) = -8a$

7. $\sqrt{2\times3\times7^2\times a}$ 가 정수가 되기 위한 가장 작은 자연수 a 를 구하면?

① 2 ② 3 ③ 6 ④ 7 ⑤ 42

해설

$\sqrt{294a} = \sqrt{2\times3\times7^2\times a}$ 이 정수가 되기 위해서는 근호안의 수가 완전제곱수가 되어야 하므로 $a = 2\times3\times k^2$ 이 되어야 한다.
$\therefore$ 가장 작은 자연수 a는 $k = 1$ 일 때이므로 $a = 2\times3\times1^2 = 6$

8. 다음 중 옳지 않은 것은?

① 순환소수는 유리수이다.

② 유한소수는 유리수이다.

③ 무한소수는 무리수이다.

④ 원주율과 $\sqrt{1000}$ 은 무리수이다.

⑤ 무리수는 실수이다.

해설

③ 순환하는 무한소수는 유리수이다.

9. 다음 중 그 값이 가장 작은 것을 a, 절댓값이 가장 큰 것을 b 라고 할 때, a, b 를 올바르게 구한 것은?

㉠ $\sqrt{24} \div \sqrt{6}$	㉡ $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{9}}$
㉢ $-\sqrt{21} \div \sqrt{3}$	㉣ $(-\sqrt{6}) \div (-\sqrt{2})$
㉤ $8 \div \sqrt{32}$	

① a : $8 \div \sqrt{32}$, b : $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{9}}$

② a : $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{9}}$, b : $-\sqrt{6} \div -\sqrt{2}$

③ a : $\sqrt{24} \div \sqrt{6}$, b : $-\sqrt{21} \div \sqrt{3}$

④ a : $-\sqrt{21} \div \sqrt{3}$, b : $-\sqrt{21} \div \sqrt{3}$

⑤ a : $\sqrt{24} \div \sqrt{6}$, b : $-\sqrt{6} \div -\sqrt{2}$

해설

㉠ $\sqrt{24} \div \sqrt{6} = \sqrt{4}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{9}} = \sqrt{2}$

㉢ $-\sqrt{21} \div \sqrt{3} = -\sqrt{7}$

㉣ $-\sqrt{6} \div -\sqrt{2} = \sqrt{3}$

㉤ $8 \div \sqrt{32} = \sqrt{2}$

따라서 가장 작은 값은 $a : -\sqrt{21} \div \sqrt{3}$, 절댓값이 가장 큰 값은 $b : -\sqrt{21} \div \sqrt{3}$

10. $\sqrt{48}-4\sqrt{32}+3\sqrt{12}+\sqrt{50}$ 을 $a\sqrt{3}+b\sqrt{2}$ 의 꼴로 고칠 때, $a+b$ 의 값은?

① -21 ② -1 ③ 4 ④ 9 ⑤ 21

해설

$\sqrt{48}-4\sqrt{32}+3\sqrt{12}+\sqrt{50}$

$=4\sqrt{3}-16\sqrt{2}+6\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

$=10\sqrt{3}-11\sqrt{2}$

$a=10,\ b=-11$

$\therefore a+b=-1$

11. 이차방정식 $ax^2+4x-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 a 값의 범위는?

① $a>-2$
② $-2<a<0,\ a>0$
③ $-2<a<0$
④ $a>2$
⑤ $a<0,\ 0<a<2$

해설

$ax^2+4x-2=0$에서

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $a\neq 0$이어야 한다.

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=2^2-(-2a)>0,\ 2a+4>0$$

$\therefore a>-2$

따라서 실수 a값의 범위는

$-2<a<0$ 또는 $a>0$

12. $y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식의 y 절편을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식은 $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2+5$ 이다. $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2+5 = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 2$

따라서 y 의 절편은 2 이다.

13. $\dfrac{1999^3 - 1}{1999 \times 2000 + 1}$ 을 계산하면?

① 1920 ② 1909 ③ 1998 ④ 1892 ⑤ 2000

해설

$x = 1999$ 라 하면,

$$\begin{aligned}\frac{1999^3 - 1}{1999 \times 2000 + 1} &= \frac{x^3 - 1}{x(x+1)+1} \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \\ &= x - 1 \\ &= 1998\end{aligned}$$

14. x에 관한 3차식 $x^3+px^2-q^2$, $x^3-(3q-p)x+2(q-1)$의 최대공약수가 $x-1$일 때, pq의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$f(x)=x^3+px^2-q^2$,

$q(x)=x^3-(3q-p)x+2(q-1)$라 놓으면

최대공약수가 $x-1$이므로

$f(1)=1+p-q^2=0\cdots$ ㉠

$g(1)=1-(3q-p)+2(q-1)=0$에서

$p-q-1=0\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $q^2-q-2=0$, $(q-2)(q+1)=0$

(i) $q=2$일 때, ㉡ $p=3$

$f(x)=(x-1)(x+2)^2$, $g(x)=(x-1)^2(x+2)$

$\therefore$ $G.C.D$가 $x-1$이라는 것에 모순

(ii) $q=-1$일 때, ㉡ $p=0$

$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)$,

$g(x)=(x-1)(x^2+x+4)$

$\therefore$ $G.C.D$는 $x-1$

$\therefore$ $pq=0$

15. 두 다항식 A, B에 대하여 $A = x^2 + ax + 2$, $B = x^2 + bx + c$이고 A, B의 최대공약수가 $x+1$, 최소공배수가 $x^3 + 2x^2 - x - 2$일 때, $a+b+c$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 2 ④ -2 ⑤ 3

해설

$A = m(x+1)$, $B = n(x+1)$이라 놓으면

$mn(x+1) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$\therefore\ mn = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

$\therefore\ m = x+2,\ n = x-1$ 또는 $m = x-1,\ n = x+2$

$A = (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$

$B = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$

여기서, $a = 3$, $b = 0$, $c = -1$

$\therefore\ a+b+c = 2$

16. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2-5x-3$ 이고 최소공배수가 x^3-2x^2-5x+6 일 때, 두 다항식의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x-3$

해설

두 다항식을 A, B 라고 하면

$A+B=(a+b)G,\ L=abG,$

즉, 최대공약수는 두 식의 합과 최소공배수의 공약수이다.

$x^3-2x^2-5x+6=(x-3)(x-1)(x+2)$

$2x^2-5x-3=(x-3)(2x+1)$

$\therefore\ G=x-3$

17. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{30}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{2i}{2}=i\ ,\ \frac{1-i}{1+i}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$$f(i)=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{30}=(-i)^{30}=(i^4)^7i^2$$

$$=-1f(-i)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{30}=i^{30}$$

$$=(i^4)^7i^2=-1$$

$$\therefore f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$$

$$=f(i)+f(-i)=-1-1=-2$$

18. $\alpha,\ \beta$ 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $\overline{\alpha},\ \overline{\beta}$ 는 각각 $\alpha,\ \beta$ 의 켤레복소수이고 $i=\sqrt{-1}$)

㉠ $\alpha=\overline{\beta}$ 이면, $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ 는 모두 실수이다. ㉡ $\alpha=\overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 이다. ㉢ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다. ㉣ $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.

① ㉡,㉢　② ㉠,㉡,㉢　③ ㉠,㉡,㉣
④ ㉠,㉡　⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣

해설

$\alpha=a+bi,\ \beta=a-bi$ ($a,\ b$ 는 실수)
㉠ $\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=a^2+b^2$
㉡ $\alpha\beta=0$, $a^2+b^2=0$, $a=0,\ b=0$
㉢ (반례) $\alpha=1,\ \beta=i$
㉣ (반례) $\alpha=1,\ \beta=i$

19. $\bar{z} = -z$ 를 만족하는 z 에 대하여 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 이라 할 때, $w\bar{w}$ 의 값을 구하여라. (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$

$\bar{z} = -z$ 이므로 $a - bi = -(a + bi)$

$a - bi = -a - bi$, $2a = 0$

따라서 $a = 0$ 이므로 $z = bi$

$z = bi$ 를 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 에 대입하면

$$w = \frac{-1+bi}{1+bi},\ \bar{w} = \overline{\left(\frac{-1+bi}{1+bi}\right)} = \frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$\begin{aligned}\therefore w\bar{w} &= \frac{-1+bi}{1+bi}\cdot\frac{-1-bi}{1-bi}\\ &= \frac{-1+bi}{1+bi}\cdot\frac{-(1+bi)}{-(-1+bi)}\\ &= \frac{-1+bi}{1+bi}\cdot\frac{1+bi}{-1+bi} = 1\end{aligned}$$

20. 다음 등식을 만족하는 실수 x의 값을 a, y의 값을 b라 할 때, $a+2b$의 값을 구하여라.
(단, $\overline{x+yi}$ 는 $x+yi$ 의 켤레복소수이다.)

$$(2+i)(\overline{x+yi})=5(1-i)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(2+i)(\overline{x+yi})=5(1-i)$

$(\overline{x+yi})=\dfrac{5(1-i)}{2+i}=1-3i$

$x+yi=1+3i$

$a=1,\ b=3$

$\therefore\ a+2b=7$

21. 양의 실수 a, b에 대하여 x에 대한 이차방정식 $ax^2+2(b+i)x+1+2i=0$의 두 근이 서로 같을 때, $a+b$의 값은?

① $1+\sqrt{5}$ ② $1-\sqrt{5}$ ③ $2+\sqrt{3}$
④ $2-\sqrt{3}$ ⑤ $1+\sqrt{3}$

해설

복소계수 이차방정식에서도 중근을 가질 조건은 $D=0$ 이다.

$ax^2+2(b+i)x+1+2i=0$ 에서

$\frac{D}{4}=(b+i)^2-a(1+2i)=0$

위의 식을 정리하면

$(b^2-1-a)+(2b-2a)i=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

a, b 가 실수이므로 ㉠에서

$b^2-1-a=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

$2b-2a=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢에서 $a=b$

$a=b$ 를 ㉡에 대입하면

$b^2-1-b=0$, $b^2-b-1=0$

$\therefore\ b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 a, b 가 양의 실수이므로

$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ a+b=1+\sqrt{5}$

22. 갑, 을 두 학생이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 푸는데, 갑은 이차항의 계수를 잘못 보고 풀어 두 근 $1\pm\sqrt{6}$을 얻었고, 을은 상수항을 잘못 보고 풀어 두 근 $-\frac{1}{3}$, 1을 얻었다. 이 이차방정식의 올바른 근을 구하여 더하면 얼마인가?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

먼저 갑이 푼 이차식의 형태를 알아보자.
갑이 푼 이차식을 $a'x^2+bx+c=0$라 하면
$-\frac{b}{a'}=1+\sqrt{6}+1-\sqrt{6}=2$,
$\frac{c}{a'}=(1+\sqrt{6})(1-\sqrt{6})=-5$이므로
갑이 푼 이차식은 위의 값들을 대입해 정리하면
$x^2-2x-5=0$의 실수배 형태인 것을 알 수 있다.
같은 방법으로 을이 푼 이차식을 알아보면
$-\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$, $\frac{c'}{a}=-\frac{1}{3}$으로
$3x^2-2x-1=0$의 실수배임을 알 수 있다.
b값은 둘 다 잘못보고 풀지 않았는데 구한 식의 원형 2개가 b값이 일치하므로
$a=3,\ c=-5$임을 알 수 있고 b는 -2임을 알 수 있다.
따라서 원래 식에서 두 근의 합은 $\frac{2}{3}$이다.

23. 이차함수 $y=-x^2+kx+k$ 의 그래프와 직선 $y=-2x+1$ 이 만나지 않도록 하는 k 값의 범위를 구하면?

① $-8<k<-1$ ② $-8<k<0$ ③ $-6<k<1$

④ $-6<k<2$ ⑤ $-6<k<2$

해설

두 함수가 만나지 않으려면
두 식을 연립하였을 때 판별식이
0보다 작아야 한다.

$\Rightarrow \quad -2x+1=-x^2+kx+k$

$\Rightarrow \quad x^2-(k+2)x+1-k=0$

$D=(k+2)^2-4(1-k)<0$

$k^2+8k<0$

$\Rightarrow \quad -8<k<0$

24. 이차함수 $y = x^2 + 4x + 6$ 의 그래프를 x 축으로 2 만큼, y 축으로 -3 만큼 평행이동한 포물선의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y = x^2 + 4x + 6 = (x + 2)^2 + 2$
$y + 3 = (x + 2 - 2)^2 + 2$
$y = x^2 - 1$
따라서 $x = 0$ 일 때 최솟값은 -1 을 갖는다.

25. x의 값의 범위가 $2 \leq x \leq 4$ 인 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$y = -2x^2 + 4x + 1 = -2(x-1)^2 + 3$ 이므로
$2 \leq x \leq 4$ 에서 $x = 2$ 일 때 최댓값1,
$x = 4$ 일 때 최솟값 -15를 가진다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $1 + (-15) = -14$