1. $(6x^3 - x^2 - 5x + 5) \div (2x - 1)$ 의 몫을 a, 나머지를 b라 할 때, $a + b$를 구하면?

① $3x^2 + x + 1$ ② $x^2 + x + 1$ ③ $3x^2 + 1$

④ $x^2 + x - 1$ ⑤ $3x^2 + x$

해설

나눗셈을 이용하면 $a = 3x^2 + x - 2$, $b = 3$

$\therefore \ a + b = 3x^2 + x + 1$

해설

조립제법을 이용할 수 있다.

이 때, $2x - 1$로 나눈 몫은 $x - \frac{1}{2}$로 나눈 몫의 $\frac{1}{2}$이고 나머지는 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right) Q(x) + R \\ &= (2x - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot Q(x) + R \end{aligned}$$

2. x 에 대한 다항식 $A = 2x^3 + 5x^2 + 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x + 1$ 이고, 나머지가 $-6x + 2$ 이다. 이 때, 다항식 B 를 구하면?

① $x^2 + 2x + 2$ ② $x^2 + x + 2$ ③ $x^2 - x + 2$

④ $x^2 - 2x + 2$ ⑤ $x^2 - 3x + 2$

해설

$A = B(2x + 1) - 6x + 2$ 에서

$B(2x + 1) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2$

$\therefore B = (2x^3 + 5x^2 + 6x + 2) \div (2x + 1)$

$= x^2 + 2x + 2$

3. x에 대한 항등식 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x-1) + cx(x-1)$에서 a, b, c의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = -1$

▷ 정답 : $c = 1$

해설

계수비교법에 의하여

$$x^2 - 2x + 3 = a + b(x-1) + cx(x-1)$$
$$= cx^2 + (b-c)x + a - b$$

$x^2 - 2x + 3 = cx^2 + (b-c)x + a - b$에서

$c = 1,\ b - c = -2,\ a - b = 3$

연립하여 풀면

$\therefore\ a = 2,\ b = -1,\ c = 1$

4. $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$가 $(x-1)(x+2)$로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ 라 놓으면,

$f(1) = 1 - a + b - 2 = 0$

$\therefore \ -a + b = 1 \cdots$ ㉠

$f(-2) = -8 - 4a - 2b - 2 = 0$

$\therefore \ 2a + b = -5 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a = -2$, $b = -1$

5. 자연수 $N = p^n q^m r^l$ 로 소인수분해될 때, 양의 약수의 개수는 $(n+1)(m+1)(l+1)$ 이다. 이 때, $38^3 + 3\cdot 38^2 + 3\cdot 38 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 9 개 ② 12 개 ③ 16 개 ④ 24 개 ⑤ 32 개

해설

$38 = x$ 라 하면,

$$\begin{aligned}38^3 + 3\cdot 38^2 + 3\cdot 38 + 1 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1\\ &= (x+1)^3\\ &= 39^3\\ &= 13^3\cdot 3^3\end{aligned}$$

$\therefore\ (3+1)(3+1) = 16$

6. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2\\ &= (x^2+3x)+(2x+6)\\ &= x^2+(3x+2x)+6\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

① 교환법칙, 결합법칙

② 교환법칙, 분배법칙

③ 분배법칙, 결합법칙

④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙

⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 && \text{(분배)}\\ &= (x^2+3x)+(2x+6) && \text{(분배)}\\ &= x^2+(3x+2x)+6 && \text{(결합)}\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

7. $(10^5+2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15　② 18　③ 21　④ 26　⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$10^{15}+2^3+3\times2\times10^5(10^5+2)$

$=10^{15}+2^3+6\times10^{10}+12\times10^5$

$=10^{15}+10^{10}\times6+10^5\times12+8$

$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

8. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$일 때, $4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca = -\frac{1}{2}$

$4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$= 4\{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)\}$

$= 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

9. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 6이고, $(x-2)^2$으로 나눈 나머지는 $6x+1$이다. 이때, $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는?

① $6x+7$ ② $-6x+5$ ③ $7x+7$
④ $7x-1$ ⑤ $8x+13$

해설

$f(1)=6,\ f(x)=(x-2)^2q(x)+6x+1$

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$에서

$f(1)=a+b=6,\ f(2)=2a+b=13$

$\therefore\ \ a=7,\ b=-1$

따라서 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는 $7x-1$이다.

10. $x^6+4x^4+x^2-6$이 $(x+a)(x+b)(x^2+c)(x^2+d)$로 인수분해 될 때, $a+b+c+d$의 값은?

① -5 ② -2 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설

조립제법을 이용한다.

$x^6+4x^4+x^2-6=(x+1)(x-1)(x^4+5x^2+6)$

$=(x+1)(x-1)(x^2+2)(x^2+3)$

$\therefore a+b+c+d=5$

11. $x^4+2x^2+9=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$로 인수분해될 때, $|ab-cd|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$(\text{준식}) = (x^2+3)^2-(2x)^2$$
$$= (x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$$

여기서 계수를 비교하면

$a=2,\ b=3,\ c=-2,\ d=3$

$\therefore |ab-cd| = |2\times3-(-2)\times3| = 12$

12. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식 A, B의 최대공약수가 $x+2$이고 최소공배수가 x^3+x^2-4x-4이다. $A+B=ax^2+bx+c$를 만족하는 상수 $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3+x^2-4x-4=(x+2)(x+1)(x-2)$

두 다항식은 각각 $(x+2)(x+1), (x+2)(x-2)$

$A+B=(x+2)(x-2)+(x+2)(x+1)$

$=2x^2+3x-2=ax^2+bx+c$

$\therefore a=2, b=3, c=-2$

$\therefore\ a+b+c=3$

13. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2-5x-3$이고 최소공배수가 x^3-2x^2-5x+6일 때, 두 다항식의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x-3$

해설

두 다항식을 A, B라고 하면

$A+B=(a+b)G,\ L=abG,$

즉, 최대공약수는 두 식의 합과 최소공배수의 공약수이다.

$x^3-2x^2-5x+6=(x-3)(x-1)(x+2)$

$2x^2-5x-3=(x-3)(2x+1)$

$\therefore\ G=x-3$

14. 두 다항식 A, B의 최대공약수를 $A \bigstar B$, 최소공배수를 $A \triangle B$라고 하자. 서로소인 두 다항 A, B식에 대하여 $\dfrac{A \triangle B}{AB \bigstar B^2}$를 간단히 한 것은?

① A ② B ③ AB ④ A^2 ⑤ B^2

해설

다항식 A, B가 서로소이므로 $AB \bigstar B^2 = B$, $A \triangle B = A \times B$

$\therefore \dfrac{A \triangle B}{AB \bigstar B^2} = \dfrac{A \times B}{B} = A$

15. $x+y=2,\ x^3+y^3=14$일 때, x^5+y^5의 값을 구하면?

① 12 ② 32 ③ 52 ④ 82 ⑤ 102

해설

$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)\cdots(*)$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$\therefore\ 14=8-6xy$

$\therefore\ xy=-1\cdots\cdots$①

$x^3+y^3=14\cdots\cdots$②

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4-2(-1)=6\cdots\cdots$③

①, ②, ③을 $(*)$에 대입하면

$x^5+y^5=6\times 14-2=82$

16. 삼차항의 계수가 1 인 삼차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)=f(2)=f(3)=3$ 이 성립할 때, $f(0)$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -3 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라고 두면,
$f(1)=1+a+b+c=3$
$f(2)=8+4a+2b+c=3$
$f(3)=27+9a+3b+c=3$
세 식을 연립하여 풀면
$a=-6,\ b=11,\ c=-3$
$f(x)=x^3-6x^2+11x-3$
$\therefore\ f(0)=-3$

해설

$f(1)=f(2)=f(3)=3$ 이므로
$f(x)-3=(x-1)(x-2)(x-3)$
$f(0)-3=-1\times(-2)\times(-3)=-6$
$\therefore f(0)=-3$

17. $y=kx^2+(1-2k)x+k-1$의 그래프는 k에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 $\mathrm{B}(b,1)$라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 $\sqrt{2}$가 되도록 하는 b의 값들의 합을 구하면?

① 1　　② 2　　③ -2　　④ -3　　⑤ -1

해설

(i) 준식을 k에 관하여 정리하면

$(x^2-2x+1)k+(x-y-1)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 성립할 조건은

$x^2-2x+1=0,\ x-y-1=0$

$\therefore\ x=1,\ y=0$

$\therefore\ A(1,0)$

(ii) $\mathrm{A}(1,0), \mathrm{B}(b,1)$에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(b-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$

$b^2-2b=0,\quad b(b-2)=0\quad \therefore\ b=0,\ 2$

$\therefore\ b$의 값들의 합은 2

18. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{2007}+1=a_0+a_1(x+4)+a_2(x+4)^2+\cdots+a_{2007}(x+4)^{2007}$이 성립할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값은?

① $(-3)^{2007}+1$ ② 0 ③ $3^{2007}+1$
④ 1 ⑤ $3^{2007}+3$

해설

양변에 $x=-3$을 대입하면
$(-3)^{2007}+1=a_0+a_1+\cdots+a_{2007}$

19. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$ 을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$ 이다. pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\}+21x^2 \\
&= (x^2-7x-18)(x^2+3x-18)+21x^2 \\
&= \{(x^2-18)-7x\}\{(x^2-18)+3x\}+21x^2 \\
&= (x^2-18)^2-4x(x^2-18)-21x^2+21x^2 \\
&= (x^2-18)(x^2-4x-18)
\end{aligned}
$$

따라서 $p=-18,\ g=-4$

$\therefore pg=(-18)\times(-4)=72$

20. 삼각형의 세변의 길이를 x, y, z라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

① x가 빗변인 직각삼각형

② y가 빗변인 직각삼각형

③ z가 빗변인 직각삼각형

④ $x = y$인 이등변삼각형

⑤ $x = y$, z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z$

$= \left\{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\right\}z$

$= (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z$

$\therefore\ (x+y)(x^2+z^2-y^2)z = 0$

$x^2 + z^2 - y^2 = 0$ ($\because$ x, y, z는 모두 양수)

$\therefore\ x^2 + z^2 = y^2 \Rightarrow y$가 빗변인 직각삼각형

21. 0이 아닌 세수 x, y, z에 대하여 x, y, z중 적어도 하나는 6이고, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$일 때, $2(x+y+z)$의 값을 구하면?

① 6　　② 12　　③ 14　　④ 16　　⑤ 18

해설

x, y, z중 적어도 하나가 6이므로,

$(x-6)(y-6)(z-6)=0$

$\therefore\ xyz-6(xy+yz+zx)+36(x+y+z)-216=0 \ \cdots ①$

또, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6},\ \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ 6(xy+yz+zx)=xyz \ \cdots ②$

①, ②에서

$36(x+y+z)=216$

$\therefore\ 2(x+y+z)=12$

22. n이 자연수일 때 $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x+2)^2$으로 나눈 나머지가 $4^n(x+2)$가 되도록 a, b의 값을 정할 때, $a-2b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$x^{2n}(x^2+ax+b)=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)\cdots①$

$x=-2$를 대입하면,

$4^n(4-2a+b)=0 \quad \therefore \ b=2a-4\cdots②$

②를 ①에 대입하면

$x^{2n}(x^2+ax+2a-4)$

$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$

한편, $x^2+ax+2a-4=x^2-4+a(x+2)$

$=(x+2)(x-2)+a(x+2)$

$=(x+2)(x-2+a)$

$\therefore \ x^{2n}(x+2)(x-2+a)$

$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$

$\therefore \ x^{2n}(x-2+a)=(x+2)Q(x)+4^n$

$x=-2$를 대입하면

$4^n(-4+a)=4^n \quad \therefore -4+a=1 \quad \therefore \ a=5$

②에서 $b=6 \quad \therefore \ a-2b=-7$

23. 임의의 자연수 k에 대하여 $x-k$로 나눈 나머지가 k인 다항식 $f(x)$의 개수를 구하면?

① 0개 ② 1개 ③ 2개

④ 3개 ⑤ 무수히 많다.

해설

나머지 정리에 의하여 임의의 자연수 k에 대하여 $\therefore\ f(k)=k$

따라서 $g(x)=f(x)-x$로 두면 모든 자연수에 대해서 $g(x)=0$이 성립

$\therefore\ g(x)=0$

즉, $f(x)=x$

$\therefore$ 1개

24. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(단, a, b, c는 상수) 라고 하면,

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

그런데 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이므로

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+(x+1)$

또 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 4이므로

$f(1)=2a+2=4$에서 $a=1$

따라서 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1=x^2+x+2$

$\therefore$ 구하는 나머지의 상수항은 2

25. $-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$ 을 인수분해했을 때, 각 인수들의 합이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $a+b$ ② $2a-2b$ ③ $2b-2a$

④ $2b-2c$ ⑤ 0

해설

a에 대한 내림차순으로 정리한다.

$-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$

$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc^2-b^2c$

$=(c-b)a^2-(c-b)(c+b)a+bc(c-b)$

$=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$

$=(c-b)(a-b)(a-c)\cdots$㉠

$=(a-b)(b-c)(c-a)\cdots$㉡

$=(b-c)(b-a)(a-c)\cdots$㉢

$=(c-a)(b-c)(b-a)\cdots$㉣

㉠식 : 세항을 모두 더하면 $2a-2b$

㉡식 : 세항을 모두 더하면 0

㉢식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2c$

㉣식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2a$