

1. A(2, 0), B(0, 2)에서의 거리의 제곱의 합이 12인 점 P(x, y)의 자취를 나타내는 식은?

① $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$

② $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 2$

③ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$

④ $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$

⑤ $x^2 + y^2 + x - y = 2$

해설

$$(\overline{PA})^2 = (x - 2)^2 + y^2$$

$$(\overline{PB})^2 = x^2 + (y - 2)^2$$

$$\therefore (x - 2)^2 + y^2 + x^2 + (y - 2)^2 = 12$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$$

2. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

3. 원 $x^2 + y^2 = 13$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면?

① $2x + 3y + 13 = 0$

② $2x + 3y - 13 = 0$

③ $3x + 2y + 13 = 0$

④ $3x + 2y - 13 = 0$

⑤ $3x - 2y - 13 = 0$

해설

$(2, 3)$ 이 원 위의 점이므로

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 13$$

$$\therefore 2x + 3y - 13 = 0$$

4. a 를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 - 2ax + 2ay - 4a - 5 = 0$ 의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y+a)^2 &= 2a^2 + 4a + 5 \\ &= 2(a+1)^2 + 3\end{aligned}$$

따라서 $a = -1$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(a, -a) = (-1, 1)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$$= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

5. 직선 $y = x + 4$ 가 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

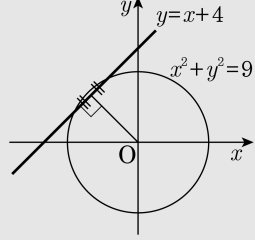
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$

이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서,

현의 길이는 $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

6. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 접선의 기울기를 m 이라고 하면

접선은 $y + 1 = m(x - 3) \cdots \textcircled{1}$

따라서 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선

$mx - y - 3m - 1 = 0$ 과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$ 와 같다.

$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}, |-3m - 1| = \sqrt{5} \sqrt{m^2 + 1}$

양변을 제곱하면

$9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5, 4m^2 + 6m - 4 = 0$

따라서, 기울기 $m = \frac{1}{2}, -2$

여기서 기울기가 음수인 -2 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$y = -2x + 5$

따라서 y 절편은 5이다.

7. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 을
표준형으로 고치면 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ 이므로
중심이 $(1, -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리 d 는
$$\frac{|1 - (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
 $d - (\text{반지름의 길이}) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

8. 좌표평면 위의 두 점 A(-1, 0), B(1, 0) 으로부터의 거리의 비가 2 : 1 이 되도록 움직이는 점 P 가 있다. 이때, △PAB 의 넓이가 자연수가 되는 점의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점 P 의 좌표를 P(x,y) 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$$\overline{AP} = 2\overline{BP}$$

$$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 4\{(x-1)^2 + y^2\}$$

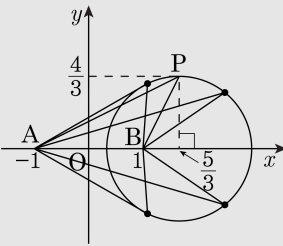
$$3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

이때, △PAB 의 넓이는 밑변 AB 가 고정되어 있으므로 높이에 따라 변하게 된다.

즉, 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 넓이가 최대이며 △PAB 의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이므로,

넓이가 자연수 1 이 되는 점은 4 개다.



9. 두 원 $x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ 의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현

이다.

두 원의 공통현의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 9) - (x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16) = 0$$

$$\therefore 8x + 6y - 25 = 0$$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B 라 하고

공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{OO'}$ 은 $\overline{AB}$ 를 수직이등분하므로 $\overline{AB} = 2\overline{AM} =$

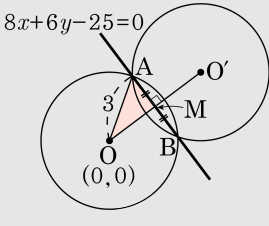
$$2\sqrt{3^2 - \overline{OM}^2} \dots\dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

그런데 $\overline{OM}$ 은 원점 O에서 직선 $8x + 6y - 25 = 0$ 까지의 거리이므로

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{5}{2} \dots\dots\dots \textcircled{\text{B}}$$

②을 ①에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$$



10. 2개의 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ 의 공통접선의 기울기를 구하면 ?

① $\pm \frac{3\sqrt{7}}{7}, \pm \frac{\sqrt{15}}{15}$
③ $\pm \frac{3\sqrt{7}}{4}, \pm \frac{\sqrt{15}}{8}$
⑤ $\pm \frac{3\sqrt{7}}{8}, \pm \frac{\sqrt{15}}{12}$

② $\pm \frac{3\sqrt{7}}{2}, \pm \frac{\sqrt{15}}{5}$
④ $\pm \frac{3\sqrt{7}}{5}, \pm \frac{\sqrt{15}}{10}$

해설

$$x^2 + y^2 = 1 \dots\dots ①$$

$$(x - 4)^2 + y^2 = 4 \dots\dots ②$$

공통접선을 $y = mx + n \dots\dots ③$ 이라 하면

①의 중심과 ③과의 거리는 1이고,

②의 중심과 ③과의 거리는 2이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1 \text{ 이고}$$

$$\frac{|4m + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$\Rightarrow m^2 + 1 = n^2 \dots\dots ④$$

$$4(m^2 + 1) = (4m + n)^2 \dots\dots ⑤$$

④를 ⑤에 대입하여 인수분해하면

$$(4m + 3n)(4m - n) = 0$$

$$n = -\frac{4}{3}m \text{ 에서 } m = \pm \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$n = 4m \text{ 에서 } m = \pm \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$\therefore m = \pm \frac{3\sqrt{7}}{7}, \pm \frac{\sqrt{15}}{15}$$