1. A(2, 0), B(0, 2)에서의 거리의 제곱의 합이 12인 점 P(x, y)의 자취를 나타내는 식은?

① $x^2+y^2+2x+2y=2$ ② $x^2+y^2+2x-2y=2$

③ $x^2+y^2-2x+2y=2$ ④ $x^2+y^2-2x-2y=2$

⑤ $x^2+y^2+x-y=2$

해설

$(\overline{\mathrm{PA}})^2=(x-2)^2+y^2$

$(\overline{\mathrm{PB}})^2=x^2+(y-2)^2$

$\therefore\ (x-2)^2+y^2+x^2+(y-2)^2=12$

$\therefore\ x^2+y^2-2x-2y=2$

2. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

3. 원 $x^2 + y^2 = 13$ 위의 점 $(2,\ 3)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면?

① $2x + 3y + 13 = 0$
② $2x + 3y - 13 = 0$
③ $3x + 2y + 13 = 0$
④ $3x + 2y - 13 = 0$
⑤ $3x - 2y - 13 = 0$

해설

$(2,\ 3)$이 원 위의 점이므로

$2 \cdot x + 3 \cdot y = 13$

$\therefore 2x + 3y - 13 = 0$

4. a를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2+y^2-2ax+2ay-4a-5=0$의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$(x-a)^2+(y+a)^2 = 2a^2+4a+5$$
$$= 2(a+1)^2+3$$

따라서 $a=-1$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(a,\ -a)=(-1,\ 1)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$= \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

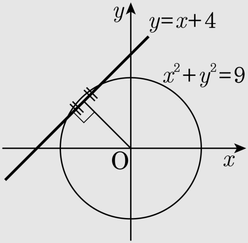
5. 직선 $y=x+4$가 원 $x^2+y^2=9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x-y+4=0$ 이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,

현의 길이는 $2\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=2$

6. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면

접선은 $y+1=m(x-3)\cdots①$

따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선

$mx-y-3m-1=0$ 과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.

$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9m^2+6m+1=5m^2+5,\ 4m^2+6m-4=0$

따라서, 기울기 $m=\frac{1}{2},-2$

여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면

$y=-2x+5$

따라서 y절편은 5이다.

7. 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 을
표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 이므로
중심이 $(1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1,\ -2)$ 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
$d-$ (반지름의 길이)$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

8. 좌표평면 위의 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$ 으로부터의 거리의 비가 $2:1$ 이 되도록 움직이는 점 P 가 있다. 이때, $\triangle$PAB 의 넓이가 자연수가 되는 점의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점 P 의 좌표를 P(x, y) 라 하면

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 2 : 1$ 이므로

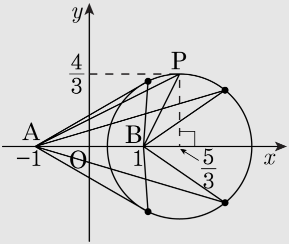
$\overline{\mathrm{AP}} = 2\overline{\mathrm{BP}}$

$\therefore \overline{\mathrm{AP}}^2 = 4\overline{\mathrm{BP}}^2$

$(x+1)^2 + y^2 = 4\left\{(x-1)^2 + y^2\right\}$

$3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$



이때, $\triangle$PAB 의 넓이는 밑변 AB 가 고정되어 있으므로 높이에 따라 변하게 된다.

즉, 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 넓이가 최대이며 $\triangle$PAB 의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이므로,

넓이가 자연수 1 이 되는 점은 4 개다.

9. 두 원 $x^2+y^2=9, x^2+y^2-8x-6y+16=0$의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

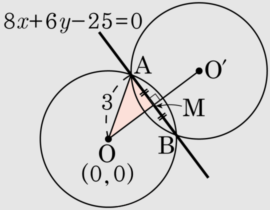
해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.

두 원의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-9)-(x^2+y^2-8x-6y+16)=0$

$\therefore 8x+6y-25=0$



이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라 하고 공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{OO'}$은 $\overline{AB}$를 수직이등분하므로 $\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\overline{OM}^2}\cdots\cdots$㉠

그런데 $\overline{OM}$은 원점 O에서 직선 $8x+6y-25=0$까지의 거리이므로

$$\overline{OM}=\frac{|-25|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{5}{2}\cdots\cdots㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=2\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$$

10. 2개의 원 $x^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=4$ 의 공통접선의 기울기를 구하면 ?

① $\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$
② $\pm\frac{3\sqrt{7}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$
③ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{4}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{8}$
④ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{5}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{10}$
⑤ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{12}$

해설

$x^2+y^2=1 \cdots\cdots$ ①
$(x-4)^2+y^2=4 \cdots\cdots$ ②
공통접선을 $y=mx+n \cdots\cdots$ ③이라 하면
①의 중심과 ③과의 거리는 1이고,
②의 중심과 ③과의 거리는 2이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \text{ 이고}$$

$$\frac{|4m+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$\Rightarrow\ m^2+1=n^2 \cdots\cdots$ ④
$4(m^2+1)=(4m+n)^2 \cdots$ ⑤
④를 ⑤에 대입하여 인수분해하면
$(4m+3n)(4m-n)=0$

$n=-\frac{4}{3}m$ 에서 $m=\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$

$n=4m$ 에서 $m=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$

$\therefore\ m=\pm\frac{3\sqrt{7}}{7},\ \pm\frac{\sqrt{15}}{15}$