1. x에 관계없이 $\dfrac{x-a}{2x-b}$가 항상 일정한 값을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $\dfrac{b}{a}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$\dfrac{x-a}{2x-b}=k$라 놓으면,

$(2k-1)x+(a-bk)=0$

$\therefore\ 2k-1=0,\ a=bk$이므로

$k=\dfrac{1}{2},\ a=\dfrac{1}{2}b$이다.

$\therefore\ \dfrac{b}{a}=2$

2. 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x+2$로 나누면 3이 남고, x^2-1로 나누면 떨어진다. 이 때, abc의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$$x^3+ax^2+bx+c = (x+2)Q_1(x)+3$$
$$= (x+1)(x-1)Q_2(x)$$

$f(-2)=3$ $f(1)=0$ $f(-1)=0$

$x=-2$ 대입, $-8+4a-2b+c=3$

$x=-1$ 대입, $-1+a-b+c=0$

$x=1$ 대입, $1+a+b+c=0$

세 식을 연립해서 구하면

$a=3, b=-1, c=-3$

$\therefore\ abc=9$

3. x 에 대한 항등식$x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 를 만족하는 상수 a, b, c, d 의 곱 $abcd$ 의 값은?

① -2　② 0　③ 5　④ 10　⑤ 18

해설

$a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$
$= (x+1)[(x+1)\{a(x+1)+b\}+c]+d$ 임을 이용하여 조립제법을 사용하면

$$
\begin{array}{r|rrrrll}
-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & & \\
 & & -1 & 1 & -1 & & \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & \boxed{-2} & \leftarrow & \text{d} \\
 & & -1 & 2 & & & \\
\hline
-1 & 1 & -2 & \boxed{3} & \leftarrow & \text{c} & \\
 & & -1 & & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{-3} & \leftarrow \text{b} & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & \text{a} & & & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ abcd = 1 \times (-3) \times 3 \times (-2) = 18$

4. 복소수 $z = (1+i)x + 1 - 2i$에 대하여 z^2이 음의 실수일 때, 실수 x의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x = -1$

해설

$z = (1+i)x + 1 - 2i = (x+1) + (x-2)i$

z^2의 음의실수 $\Leftrightarrow$ z가 순허수

$\therefore\ x+1 = 0,\ \ x = -1$

5. x, y가 양의 실수이고, $x^2 + xyi + y^2 - 5 - 2i = 0$일 때, $x + y$의 값을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - 2)i = 0$

$x^2 + y^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉠

$xy - 2 = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$

$\therefore\ x + y = 3$ ($\because$ x, y 는 양의 실수)

6. 방정식 $a(ax-1)=2(ax-1)$ 에 대한 설명으로 옳은 것은?

① $a=0$ 일 때, 부정
② $a=2$ 일 때, 불능
③ $a\neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$
④ $a\neq 0$ 일 때, 해는 없다.
⑤ $a\neq 0,\ a\neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$

해설

$a(ax-1)=2(ax-1),\ a^2x-2ax=a-2$ 에서
$a(a-2)x=a-2$
i) $a\neq 0,\ a\neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$
ii) $a=2$ 일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다. (부정)
iii) $a=0$ 일 때, $0\cdot x=-2$ 이므로 해가 없다. (불능)
따라서 옳은 것은 ⑤뿐이다.

7. 다음 방정식을 풀면?

$$(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)x+2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}$
② $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$
③ $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$
④ $x=1$ 또는 $x=-\sqrt{3}+1$
⑤ $x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

해설

x^2 의 계수를 유리수로 만들기 위해 양변에 $\sqrt{3}+1$을 곱하면
$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)^2x+2(\sqrt{3}+1)=0$
$2x^2-2(2+\sqrt{3})x+2(\sqrt{3}+1)=0$
$x^2-(2+\sqrt{3})x+(\sqrt{3}+1)=0$
$(x-1)\left\{x-(\sqrt{3}+1)\right\}=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

8. 이차방정식 $2x^2-10x+6=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$\alpha+\beta=-\frac{(-10)}{2}=5$

$\alpha\beta=\frac{6}{2}=3$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=5^2-4\cdot3=13$

9. 이차방정식 $9x^2-2kx+k-5=0$의 두 근의 차가 2일 때, 실수 k값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

작은 근을 α라 하면, 큰 근은 $\alpha+2$이므로

$\alpha+\alpha+2=\frac{2k}{9}$ ……㉠

$\alpha(\alpha+2)=\frac{k-5}{9}$ ……㉡

㉠에서 $\alpha=\frac{k}{9}-1$,

이것을 ㉡에 대입하면

$k^2-9k-36=0$, $(k-12)(k+3)=0$

$\therefore\ k=12,\ -3$

해설

두 근의 차 공식을 이용하면,

$\frac{\sqrt{(2k)^2-4\cdot 9(k-5)}}{|9|}=2$에서

$\sqrt{4k^2-36(k-5)}=18$

양변을 제곱하여 정리하면,

$k^2-9k-36=0 \therefore\ k=12,\ -3$

10. 세 실수 $a,\ b,\ c$가 다음 세 조건을 만족한다.

$$a+b+c=1,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$$

이 때, $(a+b)(b+c)(c+a)$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$a+b+c=1$에서
$a+b=1-c,\ b+c=1-a,\ c+a=1-b$
$(a+b)(b+c)(c+a)$
$=(1-c)(1-a)(1-b)$
$=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$
$=1-1+1-1=0$

11. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x)+(1+x+x^2+x^3)^3$$

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

ⅰ) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수

: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,

계수$=2$

: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x를 곱할 때,

계수$=1$

ⅱ) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수

$x+x^2+x^3=Y$ 라 하면,

$(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$

$3Y=3x+3x^2+3x^3$

일차항의 계수$=3$, 다른 항에는 일차항이 없다.

ⅰ), ⅱ) 에서 $2+1+3=6$

12. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle\mathrm{ABC}$에 대하여 $a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$인 관계가 성립할 때, $\triangle\mathrm{ABC}$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 정삼각형

해설

$a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$에서 $a^2-ab+b^2=ac+bc-c^2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, $\triangle\mathrm{ABC}$는 정삼각형이다.

13. 2가 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}$의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=k$라 하면

$ax^2+4x+b=k(x-2)$

$ax^2+(4-k)x+b+2k=0$

x에 대한 항등식이므로

$a=0$

$4-k=0$에서 $k=4$

$b+2k=0$에서 $b=-8$

$\therefore\ a-b=8$

해설

주어진 식이 모든 x에 대해 일정한 값을 가지려면

분자인 ax^2+4x+b가 분모인 '$x-2$' 만을 인수로 가져야 한다.

즉, 분자가 $k(x-2)$가 되어야 한다.

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=\dfrac{4(x-2)}{x-2}=4$

$\therefore a=0,\ b=-8$에서 $a-b=8$

14. 등식 $\dfrac{2x^2+13x}{(x+2)(x-1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x+2}$ 가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 $A,\ B,\ C$의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

양변에 $(x+2)(x-1)^2$을 곱하면
$2x^2+13x=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$에서
$x=1,\ -2,\ 0$을 차례로 대입하여 $A,\ B,\ C$를 구하면
$B=5,\ C=-2,\ A=4$
$\therefore\ A+B+C=7$

15. x^{30}을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(x)$의 상수항을 포함한 모든 계수들의 합을 구하면?

① $3^{30}+1$ ② $3^{30}-1$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $\frac{1}{3}(3^{30}-1)$ ⑤ 0

해설
$x^{30}=(x-3)Q(x)+R$
양변에 $x=3$을 대입 하면, $3^{30}=R$
$x^{30}=(x-3)Q(x)+3^{30}$
양변에 $x=1$을 대입하면, $1=-2Q(1)+3^{30}$
$\therefore\ Q(1)=\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
※ 다항식에서 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 문자대신 1을 대입한 값과 같다.

16. $x^4+2x^3-2x^2+2x-3$을 바르게 인수분해 한 것을 찾으면?

① $(x^2+1)(x+3)(x+1)$
② $(x^2+1)(x+3)(x-1)$
③ $(x^2+1)(x-3)(x-1)$
④ $(x^2-3)(x-1)(x+1)$
⑤ $(x^2+3)(x-1)(x+1)$

해설

$x^4+2x^3-2x^2+2x-3$
$=(x^4-2x^2-3)+2x^3+2x$
$=(x^2-3)(x^2+1)+2x(x^2+1)$
$=(x^2+1)(x^2+2x-3)$
$=(x^2+1)(x+3)(x-1)$

17. 두 실수 a, b에 대하여 $[a,\ b] = a^2 - b^2$라 할 때, $[x^2,\ x-1] + [2x+1,\ 3] + [0,\ 1]$을 인수분해하면 $(x-a)(x^3+x^2+bx+c)$이다. 이 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

$[x^2,\ x-1] + [2x+1,\ 3] + [0,\ 1]$
$= x^4 - (x-1)^2 + (2x+1)^2 - 9 + 0 - 1$
$= x^4 - x^2 + 2x - 1 + 4x^2 + 4x + 1 - 10$
$= x^4 + 3x^2 + 6x - 10$
$= (x-1)(x^3 + x^2 + 4x + 10)$
$= (x-a)(x^3 + x^2 + bx + c)$
따라서, $a = 1,\ b = 4,\ c = 10$이므로
$a + b + c = 15$

18. 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$과 다음과 같다고 하자.

$$f(n)\begin{cases} i^{n+1}(n=4k) \\ -i^{n}(n=4k+1)(\text{단,k는정수}) \\ 2i(n=4k+2) \\ -i(n=4k+3) \end{cases}$$

(단,k 는 정수) 이 때, $f(1)+f(2)+\cdot\cdot\cdot+f(2005)$ 를 구하면?

① i ② $-i$ ③ 0 ④ $500i$ ⑤ $501i$

해설

$n=4k \Rightarrow f(n)={}^{4k+1}=i$

$n=4k+1 \Rightarrow f(n)=-i^{4k+1}=-i$

$n=4k+2 \Rightarrow f(n)=2\pi$

$n=4k+3 \Rightarrow f(n)=-i$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-i+2i-i+i=i$

계속 반복되므로

$f(1)+f(2)+\cdots+f(2005)$

$=i\times 501+f(2005)$

$=501i-i=500i$

19. 복소수 z 에 대하여 $f(z) = z\bar{z}$ ($\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수) 라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (w 는 복소수)

보기

ㄱ $f(z) \geqq 0$

ㄴ $f(z+w) = f(z) + f(w)$

ㄷ $f(zw) = f(z)f(w)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

해설

ㄱ $z = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 라 하면

$f(z) = z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geqq 0$

ㄴ $f(z+w) = (z+w) \cdot (\overline{z+w}) = (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w})$

$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$

$\neq z\bar{z} + w\bar{w} = f(z) + f(w)$

ㄷ $f(zw) = zw \cdot (\overline{zw}) = zw \cdot \bar{z}\ \bar{w}$

$= z\bar{z} \cdot w\bar{w} = f(z)f(w)$

20. 복소수 $z = a + bi$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$(1+i+z)^2 < 0$ $\qquad z^2 = c + 4i$

이 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

$(1+i+z)^2 < 0$ 에서 $1+i+z$ 는 순허수이다.

$z = a + bi$ 라면

$1+i+z = 1+i+a+bi = (1+a)+(1+b)i$

이것이 순허수이므로 $1+a=0$, $a=-1$

$\therefore\ z = -1 + bi$

또한 $z^2 = c + 4i$ 에서 $(-1+bi)^2 = c + 4i$

$1 - 2bi - b^2 = c + 4i$

$\therefore\ -2b = 4$, $1 - b^2 = c$

$\therefore\ b = -2,\ c = -3$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = 14$

21. $w = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 일 때, $(w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$w = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ w^2+w+1=0,\quad w^3=1$

$\therefore\ (w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$

$= (w-2w-2)^2+(2w-w-1)^2$

$= (-w-2)^2+(w-1)^2$

$= w^2+4w+4+w^2-2w+1$

$= 2w^2+2w+5$

$= 2(w^2+w+1)+3$

$= 3$

22. m은 양의 정수이고, x에 관한 이차방정식 $x^2-(3+\sqrt{2})x+m\sqrt{2}-4=0$의 한 근은 정수이다. 이 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α라 하자

$\alpha^2-(3+\sqrt{2})\alpha+m\sqrt{2}-4=0$

$(m-\alpha)\sqrt{2}+\alpha^2-3\alpha-4=0$

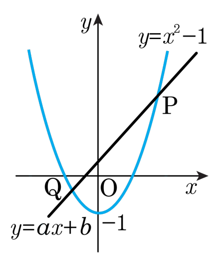
$m=\alpha$ 그리고 $\alpha^2-3\alpha-4=0$

$(\alpha+1)(\alpha-4)=0$

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=4$

m이 양의 정수이므로 $\alpha=4$에서 $m=4$

23. 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 가 다음 그림과 같이 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x의 좌표가 $1 + \sqrt{2}$일 때, $2a + b$의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 의 한 교점 P 의 x 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 $1 + \sqrt{2}$ 는 이차방정식 $x^2 - 1 = ax + b$ 의 근이다.

$\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - 1 = a\left(1 + \sqrt{2}\right) + b$

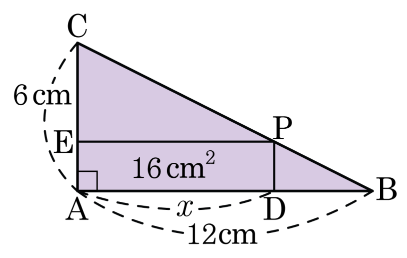
$2 + 2\sqrt{2} = a + b + a\sqrt{2}$

a, b 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$2 = a + b,\ 2 = a$

$\therefore a = 2,\ b = 0$

24. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 12\text{cm}$, $\overline{AC} = 6\text{cm}$ 인 직각삼각형 ABC 의 빗변 위에 점 P 를 잡아 직사각형 EADP 를 만들었을 때, 이 직사각형의 넓이가 16cm^2 이었다. 이 때, $\overline{AD}$ 의 길이를 구하면? (단, $\overline{AD} > 6\text{cm}$)



① 7cm ② 8cm ③ 9cm ④ 10cm ⑤ 11cm

해설

$\triangle CEP \backsim \triangle CAB$ (AA닮음) 이므로

$\overline{CE} : \overline{EP} = \overline{CA} : \overline{AB}$

즉, $\overline{CE} : x = 6 : 12$

$\therefore \overline{CE} = \frac{1}{2}x$

따라서 $\overline{EA} = 6 - \frac{1}{2}x$ 이므로 $x\left(6 - \frac{1}{2}x\right) = 16$

$-\frac{1}{2}x^2 + 6x = 16$

$x^2 - 12x + 32 = (x-4)(x-8) = 0$

$\therefore\ x = 4$ 또는 $x = 8$

그런데 $6 < x < 12$ 이므로 $x = 8(\text{cm})$

25. 지면으로부터 60m 높이에서 쏘아올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라 하면 $y = -5x^2 + 20x + 60$ 인 관계가 있다. 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 지면에 다시 떨어질 때까지 걸리는 시간을 각각 구하면?

① 1 초, 3 초 ② 2 초, 4 초 ③ 2 초, 6 초
④ 3 초, 6 초 ⑤ 3 초, 8 초

해설

최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은
$y = -5x^2 + 20x + 60 = -5(x-2)^2 + 80$ 이므로
$x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 80
따라서 2 초 후이다.
지면에 떨어질 때 $y = 0$ 이다.
$0 = -5x^2 + 20x + 60$
$-5(x^2 - 4x - 12) = 0$
$-5(x-6)(x+2) = 0$
그런데, $x > 0$ 이므로 $x = 6$
즉, 6 초 후에 지면에 떨어진다.

26. $a+b=1$ 이고 $a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{2005}+b^{2005}$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$b=1-a$ 를 a^2+b^2 에 대입하여 정리하면
$a^2-a+1=0$ $(a+1)(a^2-a+1)=0$
$a^3+1=0$ $\therefore$ $a^3=-1$
마찬가지 방법으로 $b^3=-1$
$a^{2005}+b^{2005}=(a^3)^{668}\cdot a+(b^3)^{668}\cdot b=a+b=1$

해설

a^3, b^3 의 값을 다음과 같이 구해도 된다.
$a^2-a+1=0$ 에서 $a^2=a-1$
$a^3=a^2\cdot a=(a-1)\cdot a=a^2-a=-1$
마찬가지 방법으로 $b^3=-1$

27. 모든 실수 x에 대하여 $(x-1)^{10} = a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + \cdots + a_{10}$ 이 성립할 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ 의 값은? (단, a_i는 상수, $i = 0,\ 1,\ 2, \cdots, 10$)

① -2^{10} ② -2^9 ③ 2^9 ④ 2^{10} ⑤ 2^{55}

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면

$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0 \cdots$ ①

양변에 $x = -1$을 대입하면

$a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{10} = 2^{10} \cdots$ ②

① − ② 하면 $2(a_1 + a_3 + \cdots + a_9) = -2^{10}$

$\therefore\ a_1 + a_3 + \cdots + a_9 = -2^9$

28. x에 대한 항등식 $x^{1997}+x+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$의 모든 계수와 상수항의 합을 구하면?

① 997 ② 998 ③ 1997 ④ $\frac{1997}{2}$ ⑤ $\frac{1997}{3}$

해설

$x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$라 하면

$x=1$일 때, $3=a+b$

$x=-1$일 때, $-1=-a+b$

$\therefore\ a=2,\ b=1$

$\therefore\ x^{1997}+x+1=(x^2-1)Q(x)+2x+1$

$x^{1997}-x=(x^2-1)Q(x)$

$x(x-1)(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)$

$=(x-1)(x+1)Q(x)$

$\therefore\ x(x^{1995}+x^{1994}+\cdots+x+1)=(x+1)Q(x)$

$Q(1)$이 $Q(x)$의 모든 계수의 합이므로 $x=1$을 대입하면

$2Q(1)=1996 \quad \therefore\ Q(1)=\frac{1996}{2}=998$

29. 두 다항식 $f(x), g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$는 $x+2$로 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 4이다. [보기]의 다항식 중 $x+2$로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $x+f(x)$ ㉡ $x^2+f(x)g(x)$

㉢ $f(g(x))-x$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

나머지 정리에 의해 $f(-2)+g(-2)=0, f(-2)-g(-2)=4$
두식을 연립하면, $f(-2)=2,\ g(-2)=-2$
㉠ : $x+f(x) \rightarrow x=-2$를 대입하면
$-2+f(-2)=0$
㉡ : $x^2+f(x)g(x) \rightarrow x=-2$를 대입하면 $(-2)^2+f(-2)g(-2)=0$
㉢ : $f(g(x))-x \rightarrow x=-2$를 대입하면 $f(g(-2))-(-2)=f(-2)+2=4$

30. $-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$ 을 인수분해했을 때, 각 인수들의 합이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $a+b$　　② $2a-2b$　　③ $2b-2a$

④ $2b-2c$　　⑤ 0

해설

a에 대한 내림차순으로 정리한다.

$-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$
$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc^2-b^2c$
$=(c-b)a^2-(c-b)(c+b)a+bc(c-b)$
$=(c-b)\left\{a^2-(c+b)a+bc\right\}$
$=(c-b)(a-b)(a-c)\cdots$㉠
$=(a-b)(b-c)(c-a)\cdots$㉡
$=(b-c)(b-a)(a-c)\cdots$㉢
$=(c-a)(b-c)(b-a)\cdots$㉣

㉠식 : 세항을 모두 더하면 $2a-2b$
㉡식 : 세항을 모두 더하면 0
㉢식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2c$
㉣식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2a$

31. 세 실수 $a,\ b,\ c$ 사이에 $a^2-bc=b^2-ac=c^2-ab$ 인 관계가 성립할 때, $a^3+b^3+c^3-3abc$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 0, 2
④ 0, 1　　⑤ 0, 1, 2

해설

$a^2-bc=b^2-ac$ 에서 $(a^2-b^2)+(ac-bc)=0$
$\therefore\ (a+b+c)(a-b)=0 \cdots$ ㉠
$b^2-ac=c^2-ab$ 에서 $(b^2-c^2)+(ab-ac)=0$
$\therefore\ (a+b+c)(b-c)=0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a+b+c=0$ 또는 $a=b=c$
한편 $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 이므로
ⅰ) $a+b+c=0$ 일 때 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$
ⅱ) $a=b=c$ 일 때
(준식)$=3a^3-3a^3=0$
따라서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

32. x 에 관한 두 삼차식 $P = x^3 + ax^2 + 2x - 1,\ Q = x^3 + bx^2 + 1$ 이 이차식의 최대공약수를 가질 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$P - Q = (a - b)x^2 + 2x - 2 \cdots$ ㉠
$P + Q = x\left\{2x^2 + (a + b)x + 2\right\} \cdots$ ㉡
$P,\ Q$ 의 최대공약수를 G 라 하면,
G 는 $P - Q$ 와 $P + Q$ 의 공약수이다.
그런데 G 는 이차이고, $P,\ Q$ 에는
x 라는 약수가 없으므로 ㉠, ㉡에서 G 는
$(a - b)x^2 + 2x - 2$ 이고 $2x^2 + (a + b)x + 2$ 이다.
$\therefore\ a - b = -2,\ a + b = -2$
$\therefore\ a = -2,\ b = 0$
$\therefore\ 2a + b = -4$

33. 다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 + px + q$를 다항식$g(x) = -x^3 + 2x + q$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 하고, $g(x)$ 와 $R(x)$가 $x-1$만을 공통인수로 가질 때, $f(-1)+g(2)$의 값을 구하면?

① -5　　② -4　　③ -3　　④ -2　　⑤ -1

해설

$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$에서
$f(x)$ 와 $g(x)$의 최대공약수는 $g(x)$와 $R(x)$의 최대공약수
$g(x)$ 와 $R(x)$ 의 공통인수가 $x-1$ 이므로
$g(x)$ 와 $R(x)$ 의 최대공약수가 $x-1$
$\therefore f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수가 $x-1$이다.
$f(1) = 3 + p + q = 0 \quad \therefore \ p + q = -3$
$g(1) = 1 + q = 0 \quad \therefore \ q = -1 \ \therefore \ p = -2$
$\therefore \ f(x) = x^3+2x^2-2x-1, \ g(x) = -x^3+2x-1 \ \therefore \ f(-1)+g(2) = 2-5 = -3$

34. 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$이 모두 서로 다른 두 허근을 가질 때, $(a+b)x^2+2(b+c)x+(c+a)=0$의 근을 판별하면? (단, $ab \neq 0$, $a+b \neq 0$, a, b, c는 실수)

① 중근을 갖는다.

② 두 실근을 갖는다.

③ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

④ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

⑤ 근을 판별할 수 없다.

해설

$ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$이
서로 다른 두 허근을 가지면
$b^2-ac<0, b^2<ac \cdots$ ㉠
$c^2-ab<0, c^2<ab \cdots$ ㉡
$(a+b)x^2+2(b+c)x+(c+a)=0$에서
$\frac{D}{4}=(b+c)^2-(a+b)(c+a)$
$=(b^2-ac)+(c^2-ab)-(a^2-bc)$
여기에서 a^2-bc의 부호를 판단하면 되는데
$(b^2-ac)+(c^2-ab)+(a^2-bc)$
$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\} \geq 0$
㉠, ㉡가 성립하므로 $a^2-bc>0$
$\therefore \frac{D}{4}<0$, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

문제에서 주어진 두 방정식이 각각 허근을 가지면
$b^2-ac<0, b^2<ac \cdots$ ㉠
$c^2-ab<0, c^2<ab \cdots$ ㉡
㉠, ㉡를 변변끼리 곱하면
$(bc)^2<a^2bc \cdots$ ㉢
$ac>0, ab>0 \Rightarrow bc>0$
㉢의 양변을 bc로 나누면
$bc<a^2 \quad \therefore a^2-bc>0$
$(a+b)x^2+2(b+c)x+(c+a)=0$에서
$\frac{D}{4}=(b+c)^2-(a+b)(c+a)$
$=(b^2-ac)+(c^2-ab)-(a^2-bc)<0$
$(\because b^2-ac<0, c^2-ab<0, a^2-bc>0)$
$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

35. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $a>0,\ b>0,\ b^2-4ac>0$일 때, 다음 설명 중 옳은 것은?

① 두 근은 모두 음이다.

② 음근을 가질 수 없다.

③ 적어도 한 개의 음근을 갖는다.

④ 두 근은 모두 양이다.

⑤ 양근 한 개, 음근 한 개를 갖는다.

해설

$b^2-4ac>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
서로 다른 두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}<0,\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

(i) $c>0$이면 $\alpha\beta>0$이므로 두 근은 모두 음
(ii) $c<0$이면 $\alpha\beta<0$이므로 두 근은 양, 음
(iii) $c=0$이면 $\alpha\beta=0$이므로 두 근은 음, 0

36. 이차함수 $y = x^2 + kx - 2k$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값과 그 때의 k 의 값을 각각 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 4$

▷ 정답 : $k = -4$

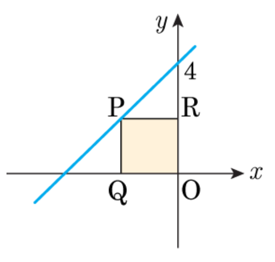
해설

$y = \left(x + \frac{1}{2}k\right)^2 - 2k - \frac{1}{4}k^2$

$\therefore m = -2k - \frac{1}{4}k^2 = -\frac{1}{4}(k+4)^2 + 4$

따라서 m 의 최댓값은 4 , $k = -4$ 이다.

37. 다음 그림과 같이 직선이 $y = x + 4$ 위의 점 P 에서 x 축과 y 축에 내린 수선의 발이 각각 Q, R 이고 직사각형 PQOR 의 넓이를 S 라 한다. S 가 최대가 될 때 점 P 의 좌표는?



① $(2, 1)$ ② $(2, 4)$ ③ $(-2, 2)$

④ $(-2, -4)$ ⑤ $(4, 2)$

해설

점 P 의 좌표는 $(a, a+4)$ 이고 넓이는 S 이므로

$S = a(a+4) = (a^2 + 4a + 4) - 4 = (a+2)^2 - 4$

$\therefore \mathrm{P}(-2, -2+4) = \mathrm{P}(-2, 2)$