1. 다항식 $8x^3 - 1$을 $4x^2 + 2x + 1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때 $Q(x)$의 상수항의 계수는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x-1)\left(4x^2 + 2x + 1\right)$

$\therefore Q(x) = 2x - 1$

$\therefore$ 상수항은 -1

2. $a^2b+b^2c-b^3-a^2c$을 인수분해하면?

① $(a+b)(a-b)(b+c)$ ② $(a-b)(b-c)(c+a)$
③ $(a-b)(a+b)(b-c)$ ④ $(a-b)(a+b)(c-a)$
⑤ $(a-b)(b+c)(c-a)$

해설
$a^2b+b^2c-b^3-a^2c$
$=a^2(b-c)-b^2(b-c)$
$=(a-b)(a+b)(b-c)$

3. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해하였더니, $(x+ay)(x-by+c)$가 되었다. 이 때, $a,\ b,\ c$를 순서대로 쓴 것은?

① $-1,\ 0,\ 1$　② $-1,\ 1,\ 2$　③ $-2,\ -1,\ 1$　④ $-1,\ -1,\ -2$　⑤ $-1,\ 2$

해설

$$\begin{aligned} x^2-2x-y^2+2y &= (x+y)(x-y)-2(x-y) \\ &= (x-y)(x+y-2) \end{aligned}$$

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ c=-2$

4. $(x^2+x)(x^2+x+1)-6$을 인수분해하면?

① $(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$　② $(x-1)(x+2)(x^2+x-3)$
③ $(x-2)(x+1)(x^2+x+3)$　④ $(x-1)(x+2)(x^2-x+3)$
⑤ $(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

해설

$x^2+x=X$라 하자.

(준식) $=X(X+1)-6$
$=X^2+X-6$
$=(X+3)(X-2)$
$=(x^2+x+3)(x^2+x-2)$
$=(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$

5. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$(\text{좌 변}) = (x^2 + 2)^2 - x^2$$
$$= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$$
$$\therefore \ a = -1, \ b = 2$$
$$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$$

6. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

x^2-2x-y^2+2y
$=(x^2-y^2)-2(x-y)$
$=(x+y-2)(x-y)$
$=(x+ay)(x-by+c)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-1, c=-2$
$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

7. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 놓으면,
$x=-1$일 때, $-1-4-1+6=0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x)=(x+1)Q(x)$꼴
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x^2-5x+6)(x+1)$
$\therefore\ f(x)=(x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(-3)^2+(-2)^2+1^2=14$

8. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$$\therefore \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1}=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$=a+1=2000$$

9. 두 다항식 x^3-3x^2+2x, $x^4-4x^3+4x^2$의 최대공약수와 최소공배수를 각각 $f(x), g(x)$라 할 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하면?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

$x^3-3x^2+2x = x(x-2)(x-1)$
$x^4-4x^3+4x^2 = x^2(x-2)^2$
$\therefore f(x) = x(x-2), g(x) = x^2(x-1)(x-2)^2$
$\therefore f(3)+g(3) = 3+18 = 21$

10. 세 개의 다항식 x^3+ax+b, x^3+cx^2+a, cx^2+bx+4, 의 공약수 중 하나가 $x-1$일 때, $a+b+c$의 값은?

① 2　　② −2　　③ 3　　④ −3　　⑤ 4

해설

$f(x)=x^3+ax+b \to f(1)=1+a+b=0 \cdots$ ㉠
$g(x)=x^3+cx^2+a \to g(1)=1+c+a=0 \cdots$ ㉡
$h(x)=cx^2+bx+4 \to h(1)=c+b+4=0 \cdots$ ㉢
㉠ + ㉡ + ㉢에서 $2(a+b+c)+6=0$
$\therefore a+b+c=-3$

11. 다음 중 인수분해가 잘못된 것을 고르면?

① $(x-y)^2-xy(y-x)=(x-y)(x-y+xy)$

② $3a^2-27b^2=3(a+3b)(a-3b)$

③ $64a^3-125=(4a+5)(16a^2-20a+25)$

④ $(x^2-x)(x^2-x+1)-6=(x^2-x+3)(x+1)(x-2)$

⑤ $2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$

해설

$64a^3-125$
$=(4a)^3-(5)^3$
$=(4a-5)\left(16a^2+20a+25\right)$

12. $(x^2-x)(x^2-x+1)-6$을 인수분해 하면?

① $(x^2-x+2)(x-3)(x+1)$

② $(x^2-x+3)(x-2)(x+1)$

③ $(x^2+x+1)(x-2)(x+3)$

④ $(x^2-x+2)(x+3)(x-1)$

⑤ $(x^2-x+1)(x+2)(x-3)$

해설

$A=x^2-x$로 치환하면

(준식) $=A(A+1)-6$

$=A^2+A-6$

$=(A+3)(A-2)$

즉, $(x^2-x+3)(x^2-x-2)$

$=(x^2-x+3)(x-2)(x+1)$

13. 다음 중 다항식 $x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 3y - 2$의 인수인 것은?

① $x + y + 2$ ② $x - y + 2$ ③ $x + 2y + 1$
④ $x - 2y + 1$ ⑤ $x + y + 1$

해설

$x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 3y - 2$
$= x^2 + (3y - 1)x + 2y^2 - 3y - 2$
$= x^2 + (3y - 1)x + (2y + 1)(y - 2)$
$= (x + 2y + 1)(x + y - 2)$

14. $3x^2+2xy-y^2-x+3y-2$의 인수인 것은?

① $2x+y+1$　② $x+y+1$　③ $2x-y+1$
④ $3x-y+2$　⑤ $3x+y+2$

해설
준 식을 내림차순으로 정리하면
$3x^2+2xy-x-y^2+3y-2$
$=3x^2+(2y-1)x-(y-1)(y-2)$
인수분해하면 $(x+y-1)(3x-y+2)$

15. 다음 중 다항식 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a-b$　　② $b-c$　　③ $c-a$

④ $a+b+c$　　⑤ $a-b+c$

해설

주어진 식을 a에 관하여 정리하면

(준식)$= a^3(b-c) - a(b^3-c^3) + bc(b^2-c^2)$

$= (b-c)\{a^3 - a(b^2+bc+c^2) + bc(b+c)\}$

$= (b-c)\{b^2(c-a) + b(c^2-ca) - a(c^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$

$= (b-c)(c-a)\{c(b-a) + (b^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$

16. 다음 중 $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x - 1$ ② $x + 1$ ③ $x - 3$ ④ $x + 3$ ⑤ $x + 2$

해설

준식을 인수정리와 조립제법을 이용하여 정리하면
$(x-1)(x-3)(x+2)(x+3) = 0$
※ 최고차항의 계수가 1 인 다항식에서 인수정리를 사용할 때, 상수항의 약수 중에서 대입하여 0 이 되는 정수를 찾아본다.

17. $11 \cdot 13^3 + 33 \cdot 13^2 + 33 \cdot 13 + 11$ 의 인수가 아닌 것을 고르면?

① 3　② 7　③ 11　④ 14　⑤ 22

해설

$11 = a,\ 13 = b$ 라 하면

$a \cdot b^3 + 3ab^2 + 3ab + a$

$= a(b^3 + 3b^2 + 3b + 1)$

$= a(b+1)^3 = 11 \cdot 14^3$

$= 11 \times 2^3 \times 7^3$

18. $x=1001$ 일 때, $\dfrac{x^6-x^4+x^2-1}{x^5+x^4+x+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6-x^4+x^2-1}{x^5+x^4+x+1} &= \frac{(x^4+1)(x^2-1)}{(x^4+1)(x+1)}\\ &= x-1\\ &= 1001-1\\ &= 1000\end{aligned}$$

19. 임의의 실수 a, b에 대하여 연산 $\triangle$를 $a \triangle b = a^2 - ab + b^2$라 할 때, $(x^2 \triangle x) + (2x \triangle x) - (x \triangle 1) - 3$을 인수분해하면?

① $(x-1)(x+1)(x^2-x+4)$　② $(x-2)(x+1)(x^2-x+4)$

③ $(x-1)(x+2)(x^2-x+2)$　④ $(x-1)(x+1)(x+2)^2$

⑤ $(x-2)(x+1)(x+2)^2$

해설

$x^2 \triangle x = x^4 - x^3 + x^2$

$2x \triangle x = 4x^2 - 2x^2 + x^2 = 3x^2$

$x \triangle 1 = x^2 - x + 1$이므로

$$
\begin{aligned}
\text{준 식} &= x^4 - x^3 + x^2 + 3x^2 - x^2 + x - 1 - 3 \\
&= x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 4 \\
&= (x-1)(x+1)(x^2-x+4)
\end{aligned}
$$

20. 두 이차다항식의 최대공약수가 $x-2$이고, 최소공배수가 $x^3-6x^2+3x+10$일 때, 두 다항식의 합을 구하면? (단, 이차항의 계수는 모두 1이다.)

① $2x^2-6x+8$　② $2x^2-6x+7$　③ $2x^2-8x+8$
④ $2x^2-9x+10$　⑤ $2x^2+6x+9$

해설

구하는 두 다항식의 최대공약수가 $x-2$이므로
두 다항식은 $(x-2)a, (x-2)b$ (a, b는 서로소)
최소공배수 $(x-2)ab = x^3-6x^2+3x+10$
$= (x-2)(x+1)(x-5)$
그러므로 $a = x-5, b = x+1$
또는 $a = x+1, b = x-5$
따라서 두 다항식은
$(x-2)(x-5) = x^2-7x+10$,
$(x-2)(x+1) = x^2-x-2$
$\therefore$ 두 다항식의 합은 $2x^2-8x+8$

21. 두 다항식의 최대공약수는 $2x-1$ 이고 두 다항식의 곱은 $4x^3+4x^2-7x+2$ 이다. 이 두 다항식의 합을 $g(x)$ 라면 $g(1)$ 의 값을 구하면?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$4x^3+4x^2-7x+2$

$(x-\frac{1}{2})(4x^2+6x-4)$

$=(x-\frac{1}{2})\cdot 2\cdot(2x^2+3x-2)(2x-1)(2x-1)(x+2)$

두 다항식의 곱이 $(2x-1)^2(x+2)$ 이고

최대공약수가 $(2x-1)$ 이므로

두 다항식은 $(2x-1),(2x-1)(x+2)$

$g(x)=(2x-1)+(2x-1)(x+2)$

$g(1)=1+3\cdot 1=4$

22. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x-3$이고, 최소공배수가 x^3-2x^2-3x일 때, 두 이차다항식의 합을 구하면?

① $2x^2-5x$　② $2x^2-x-3$　③ $2x^2+x+3$
④ $2x^2-5x-3$　⑤ $2x^2+5x+3$

해설

두 식 A, B의 최대공약수가 $x-3$ 이고 최소공배수가 $x(x-3)(x+1)$ 이다.
따라서 이차항의 계수가 1인 두 다항식은
각각 $x(x-3)$, $(x-3)(x+1)$ 이다.
$\therefore$ 두 다항식의 합 $= 2x^2-5x-3$

23. 최고차항의 계수가 1 인 두 이차식의 최대공약수가 $x+3$ 이고 최소공배수가 x^3+x^2-6x 일 때, 두 이차식의 합은?

① $(x+1)(x-2)$　　② $(x+2)(x+4)$

③ $2(x-1)(x+3)$　　④ $2(x-2)(x-4)$

⑤ $2(x+1)(x-4)$

해설

최대공약수가 $x+3$ 이므로 두 이차식을
$a(x+3)$, $b(x+3)$ (a, b 는 서로소) 라 하고
최소공배수를 $f(x)=x^3+x^2-6x$ 라 하면
$f(x)=x(x^2+x-6)=x(x+3)(x-2)$
따라서 두 다항식은
$x(x+3)$, $(x-2)(x+3)$ 이므로
구하는 두 다항식의 합은

$$\begin{aligned} x(x+3)+(x-2)(x+3) &= (x+3)(2x-2) \\ &= 2(x-1)(x+3) \end{aligned}$$

24. 다항식 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$가 이차다항식의 완전제곱꼴이 되도록 a의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$
$=(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+a$
$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+a$
$x^2+8x=A$로 놓으면
(준식) $=(A+7)(A+15)+a$
$=A^2+22A+105+a$
$=(A+11)^2-16+a$
따라서, $a=16$일 때 이차식 $x^2+8x+11$의 완전제곱식이 된다.

25. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots ㉠$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots ㉡$

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots ㉢$

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots ㉣$

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

26. $\dfrac{899^3+1}{899\times 898+1}$ 의 양의 약수의 개수는?

① 27 개 ② 25 개 ③ 21 개 ④ 18 개 ⑤ 15 개

해설

$a = 899$ 라 치환하면

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{a^3+1}{a(a-1)+1} \\ &= \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1} \\ &= a+1 = 900\end{aligned}$$

$900 = 2^2\times 3^2\times 5^2$

$\therefore$ 900 의 약수의 개수 $= (2+1)\times(2+1)\times(2+1)$

$= 27$

27. 모든 모서리의 길이의 합이 60이고, 대각선의 길이가 $\sqrt{77}$인 직육면체의 겉넓이는?

① 88　　② 100　　③ 124　　④ 148　　⑤ 160

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 x, y, z라고 하면

$4(x+y+z)=60$에서 $x+y+z=15$

또, 대각선의 길이는

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{77}$이므로

$x^2+y^2+z^2=77$

이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이고

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$이므로

$77=15^2-2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=225-77=148$

따라서, 직육면체의 겉넓이는 148이다.

28. 두 실수 a, b에 대하여 $[a,\ b] = a^2 - b^2$라 할 때, $\left[x^2,\ x-1\right] + [2x+1,\ 3] + [0,\ 1]$을 인수분해하면 $(x-a)(x^3+x^2+bx+c)$이다. 이 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?

① 5　　② 10　　③ 15　　④ 20　　⑤ 25

해설

$\left[x^2,\ x-1\right] + [2x+1,\ 3] + [0,\ 1]$
$= x^4 - (x-1)^2 + (2x+1)^2 - 9 + 0 - 1$
$= x^4 - x^2 + 2x - 1 + 4x^2 + 4x + 1 - 10$
$= x^4 + 3x^2 + 6x - 10$
$= (x-1)(x^3+x^2+4x+10)$
$= (x-a)(x^3+x^2+bx+c)$
따라서, $a=1,\ b=4,\ c=10$이므로
$a+b+c=15$

29. 두 다항식 x^3-2x^2-5x+6과 $3x^3+(a-9)x^2-ax-6a$의 최대공약수가 이차식일 때, a의 값은?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 3

해설

$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)$
$3x^3+(a-9)x^2-ax-6a$에
$x=3$ 대입, $81+9a-81-3a-6a=0$
$x=-2$ 대입, $-24+4a-36+2a-6a\neq 0$이므로
$x-1$을 인수로 가져야 한다.
$x=1$ 대입 $3+a-9-a-6a=0$, $a=-1$

30. $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$가 다음 조건을 만족할 때, $ab - c + d$의 값은?

㉠ $f(x)$, $g(x)$의 최소공배수는 $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$이다.
㉡ $f(1) = -4$, $g(0) = 5$

① -31　② -11　③ 5　④ 13　⑤ 29

해설

두 다항식의 최소공배수
$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x+1)(x+5)(x-3)$에서
인수들 중 적당한 두 인수들로 $f(1) = -4$,
$g(0) = 5$이 되도록 $f(x), g(x)$를 만들면
$f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$
$g(x) = (x+1)(x+5) = x^2 + 6x + 5$
$a = -2, b = -3, c = 6, d = 5$
$\therefore\ ab - c + d = 5$

31. 세 변의 길이가 $x,\ y,\ z$인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4=0$이 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?

① $z=x$인 이등변삼각형, 또는 y가 빗변인 직각삼각형

② $y=z$인 이등변삼각형, 또는 x가 빗변인 직각삼각형

③ x가 빗변인 직각삼각형

④ y가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x=y$인 이등변 삼각형, 또는 z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x-y)(x^2+xy+y^2)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)\{(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)-2(x^2+xy+y^2)z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3+x^2y^2+y^4-2x^2z^2-2xyz^2-2y^2z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)\{(x^2+y^2-z^2)^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2+2xy)=0$
$\therefore$ $x=y$인 이등변 삼각형 또는 z가 빗변인 직각 삼각형
($\because$ $x^2+y^2-z^2+2xy=(x+y)^2-z^2$에서 삼각형의 변인 $x,\ y,\ z$는 $x+y\neq z$)

32. 두 다항식 x^3+ax^2+bx+1과 x^3+bx^2+ax+1의 최대공약수가 일차식일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$A(x)=x^3+ax^2+bx+1$, $B(x)=x^3+bx^2+ax+1$로 놓으면

$A(x)-B(x)$

$=(x^3+ax^2+bx+1)-(x^3+bx^2+ax+1)$

$=(a-b)x(x-1)$

$A(x)$, $B(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 최대공약수는 x이거나 $x-1$이 될 수 있지만 두 다항식의 상수항이 1이므로 최대공약수는 $x-1$이다.

따라서 다항식 $A(x)$는 $x-1$을 인수로 가지므로 나머지정리에 의하여

$A(1)=1+a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-2$

33. 두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나눈 몫을 Q_1 , 나머지를 R_1 이라 할 때, B 는 R_1 로 나누어 떨어지고 그 몫은 Q_2 이다. 이 때, A, B 의 최소공배수는? (단, A 의 차수가 B 의 차수보다 크다.)

① AB ② $\frac{AB}{R_1}$ ③ $\frac{AB}{Q_1}$
④ $\frac{AB}{Q_2}$ ⑤ $\frac{AB}{Q_1Q_2}$

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면
$A = BQ_1 + R_1 \cdots$ ㉠
$B = R_1Q_2 \cdots$ ㉡
유클리드의 호제법에 의하여
A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R_1 의 최대공약수와 같다.
㉠, ㉡에서 B 와 R_1 의 최대공약수는 R_1 이므로
A 와 B 의 최대공약수는 R_1 이다.
따라서, A, B 의 최소공배수는 $\frac{AB}{R_1}$