1. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ 내림차순으로 정리하면 $3yx^3+(9y-z)x+5y-4$이다. ㉡ 오름차순으로 정리하면 $5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다. ㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다. ㉣ x^3 의 계수는 3이다. ㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢
② ㉠, ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉡
④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

2. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $A \ominus B$와 $A \otimes B$을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$A \ominus B = A - 3B$, $A \otimes B = (A+B)B$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3$, $Q = x^3 + x^2y + xy^2$이라 할 때, $(P \ominus Q) \otimes Q$를 x, y에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$　　② $x^4y^2 - xy^5$　　③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$　　⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \cdots \text{①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P - 2Q \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

3. $(6x^3-x^2-5x+5)\div(2x-1)$의 몫을 a, 나머지를 b라 할 때, $a+b$를 구하면?

① $3x^2+x+1$ ② x^2+x+1 ③ $3x^2+1$

④ x^2+x-1 ⑤ $3x^2+x$

해설

나눗셈을 이용하면 $a=3x^2+x-2$, $b=3$

$\therefore\ a+b=3x^2+x+1$

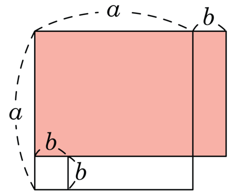
해설

조립제법을 이용할 수 있다.

이 때, $2x-1$로 나눈 몫은 $x-\frac{1}{2}$로 나눈 몫의 $\frac{1}{2}$이고 나머지는 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R \\ &= (2x-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot Q(x)+R \end{aligned}$$

4. 다음 그림에서 색칠한 부분이 나타내고 있는 곱셈공식은 무엇인가?



① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

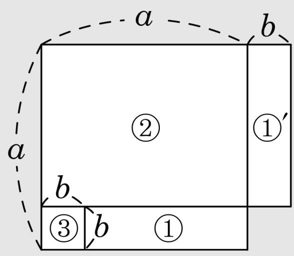
② $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

③ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

④ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

해설



$(a+b)(a-b) = ①' + ②$

$①' = ①$이므로

$(a+b)(a-b) = ① + ② = a^2 - b^2$

$\therefore\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

5. $(a+b-c)(a-b+c)$를 전개하면?

① $a^2+b^2-c^2-2bc$

② $a^2-b^2+c^2-2bc$

③ $a^2+b^2-c^2+2ab$

④ $a^2-b^2-c^2+2bc$

⑤ $a^2-b^2-c^2-2ab$

해설

$$
\begin{aligned}
&(a+b-c)(a-b+c)\\
&=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}\\
&=a^2-(b-c)^2\\
&=a^2-b^2-c^2+2bc
\end{aligned}
$$

6. 세 다항식 $A = x^2 + 3x - 2,\ B = 3x^2 - 2x + 1,\ C = 4x^2 + 2x - 3$ 에 대하여
$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$를 간단히 하면?

① $3x^2 + 12x - 13$

② $-3x^2 + 24x + 21$

③ $3x^2 - 12x + 21$

④ $-3x^2 - 24x + 21$

⑤ $x^2 + 12x + 11$

해설

$$
\begin{aligned}
&3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B \\
&= -2A + 5B - 4C \\
&= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3) \\
&= -3x^2 - 24x + 21
\end{aligned}
$$

7. 두 다항식 $A=a+2b$, $B=2a+3b$일 때, $2A+B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$
\begin{aligned}
2A+B &= 2(a+2b)+(2a+3b) \\
&= (2a+4b)+(2a+3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\
&= 2a+(4b+2a)+3b && \text{㉡ 결합법칙} \\
&= 2a+(2a+4b)+3b && \text{㉢ 교환법칙} \\
&= (2a+2a)+(4b+3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\
&= (2+2)a+(4+3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\
&= 4a+7b
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a+(2a+4b)+3b=(2a+2a)+(4b+3b)$: 결합법칙

8. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+2 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지가 $x+3$ 이 되도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-6$

해설

검산식을 사용

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)\cdot A+(x+3)$

$A=(x+p)$

$x^3+ax^2+bx+2-(x+3)=(x^2-x+1)(x+p)$

$x^3+ax^2+(b-1)x-1=(x^2-x+1)(x-1)\ \ \therefore p=-1$

우변을 정리하면

$\therefore\ \ a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

9. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2$ 이고 $ab \neq 0$ 일 때, 다음 중 성립하는 것을 고르면? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $ax+by=0$　② $a+b=x+y$　③ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

④ $x=y$　⑤ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

해설

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=0$을

간단히 정리하면

$a^2y^2+b^2x^2-2abxy=0$

즉, $(ay-bx)^2=0$

$\therefore\ ay-bx=0(\because\ a,\ x,\ b,\ y$는 실수$)$

따라서, $ay=bx$에서 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

10. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(x+1)(y+1)(z+1)$

$= xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$

$= 7$

11. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=2,\ a^2+b^2+c^2=6,\ abc=-1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^3+2(ab+bc+ca)$

$ab+bc+ca=-1$

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=2\times(6-(-1))-3=11$

12. $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$이고, $a=\sqrt{3}+1$일 때, $a^{x^2}\div a^{2\sqrt{2}x+3}$의 값을 구하면?

① $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ ② $\dfrac{4+\sqrt{3}}{4}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{4}$

④ $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

해설

(i) $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$에서 $x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$

$x^2-2\sqrt{2}x+2=3$

$\therefore\ x^2-2\sqrt{2}x=1$

(ii) $a^{x^2}\div a^{2\sqrt{2}x+3}=a^{x^2-2\sqrt{2}x-3}=a^{-2}$

$$=\frac{1}{a^2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

13. $x^2+x-1=0$ 일 때, x^5-5x 의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

x^5-5x 를 x^2+x-1 로 나누면

즉, $x^5-5x=(x^2+x-1)\times$ 몫-3

$x^2+x-1=0$

$\therefore\ x^5-5x=-3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.

$x^2=-x+1$

$$\begin{aligned} x^5-5x &= (x^2)^2\times x-5x \\ &= x(-x+1)^2-5x \\ &= x^3-2x^2-4x \\ &= x(-x+1)-2(-x+1)-4x \\ &= -x^2-x-2 \\ &= -(x^2+x)-2 \\ &= -1-2=-3 \end{aligned}$$

14. $x+y+z=4,\ xy+yz+zx=1,\ xyz=2$일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$의 값을 구하면?

① 16 ② 8 ③ 4 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$을

$xy+yz+zx=1$을 이용하여 변형하면

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$

$=(1-zx)(1-xy)(1-yz)$

$=1-(xy+yz+zx)+(x^2yz+xy^2z+xyz^2)-(xyz)^2$

$=1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-(xyz)^2$

$=1-1+2\cdot4-4$

$=4$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$(x-a)(x-b)(x-c)$

$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

15. $2^{16}-1$은 1과 10사이의 어떤 두 수로 나누어떨어진다. 이 때, 이 두 수의 합은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 임을 이용하여 $2^{16}-1$을 인수분해하면

$2^{16}-1=(2^8)^2-1^2$

$=(2^8+1)(2^8-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^4-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2^2-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1)$

$=257\cdot17\cdot5\cdot3$

따라서 $2^{16}-1$을 나누었을 때 나누어 떨어지는 1과 10사이의 수

즉, 인수는 3과 5이고 이 두 수의 합은 8이다.

16. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

① 0 ② −1 ③ 1 ④ −10 ⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면,

$$(\text{우변}) = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})x^9 + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$

양변의 계수를 비교하면

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$

17. $x+\dfrac{1}{x}=3$ 일 때, $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 의 값과 $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ 의 값을 차례대로 구하면? (단, $x>0$)

① 5, 6 ② 7, 18 ③ 8, 16

④ 9, 18 ⑤ 10, 27

해설

$x+\dfrac{1}{x}=3$ 일 때

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=27-9=18$$

18. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은?

① $(x-a)(x-b)(x-c)$
$= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

② $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
$= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

③ $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

④ $(x+a)(x+b)(x+c)$
$= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$= a^3+b^3+c^3-3abc$

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를
각각 a, b, c라 하면 대각선의 길이는
$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 28$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2 = 28^2 \cdots$ ㉠
또, 모든 모서리의 길이의 합은 176이므로
$4(a+b+c) = 176$
$\therefore\ a+b+c = 44 \cdots$ ㉡
이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$이므로
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \cdots$ ㉢
따라서 ㉠, ㉡을 ㉢에 대입하여 겉넓이를 구하면 1152이다.

19. $a+b=4$, $a^2+b^2=10$일 때, a^5+b^5의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 244

해설

$a+b=4$, $a^2+b^2=10$

$ab=\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}=3$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=28$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^5+b^5&=(a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)\\&=28\times10-9\times4\\&=244\end{aligned}$$

20. $x - \frac{1}{x} = 1$일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$의 값은?

① $\pm 6\sqrt{5}$ ② $\pm 5\sqrt{5}$ ③ $\pm 3\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{5}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$에서

$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 3$에서

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 5$

$\therefore\ x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{5}$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$= \pm 5\sqrt{5} - 3(\pm\sqrt{5}) = \pm 2\sqrt{5}$$

$\therefore\ x^5 + \frac{1}{x^5} = 3(\pm 2\sqrt{5}) - (\pm\sqrt{5}) = \pm 5\sqrt{5}$

21. 1999개의 다항식 $x^2-2x-1,\ x^2-2x-2,\ \cdots,\ x^2-2x-1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

① 43개 ② 44개 ③ 45개 ④ 46개 ⑤ 47개

해설

$x^2-2x-n=(x+a)(x-b)$ ($a,\ b$는 자연수)라 하면 ($1 \le n \le 1999$인 자연수)

$ab=n,\ a=b-2$

$\therefore n=1\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 5,\ \cdots,\ 43\cdot 45(=1935)$의 43개

22. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$[x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y]$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y$

$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)+2(x+y)(x-y)+(x-y)$

$=(x-y)\{(x+y)^2+2(x+y)+1\}$

$=(x-y)(x+y+1)^2$

$p=-1, q=1, r=1$

$\therefore\ p^2+q^2+r^2=3$

23. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$ 을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$ 이다. pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\}+21x^2 \\ &= (x^2-7x-18)(x^2+3x-18)+21x^2 \\ &= \{(x^2-18)-7x\}\{(x^2-18)+3x\}+21x^2 \\ &= (x^2-18)^2-4x(x^2-18)-21x^2+21x^2 \\ &= (x^2-18)(x^2-4x-18)\end{aligned}$$

따라서 $p=-18,\ g=-4$

$\therefore pg=(-18)\times(-4)=72$

24. $xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$ 을 인수분해하면?

① $-(x-y)(y-z)(z-x)$ ② $-(x+y)(y-z)(z-x)$

③ $-(x-y)(y+z)(z-x)$ ④ $-(x-y)(y-z)(z+x)$

⑤ $-(x-y)(y+z)(z+x)$

해설

(준 식)$= xy(x-y)+zx(z-x)+yz(y-z)$

$= yx^2-y^2x+z^2x-zx^2+yz(y-z)$

$= (y-z)x^2-(y^2-z^2)x+yz(y-z)$

$= (y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+yz(y-z)$

$= (y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$

$= (y-z)(x-y)(x-z)$

$= -(x-y)(y-z)(z-x)$

25. $a+b+c=0$일 때, $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 값을 구하면?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

$a+b+c=0$이면 $a^3+b^3+c^3=3abc$이다.

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(a+c)}{ac}+\frac{c(a+b)}{ab} \\ &= \frac{a^2(-a)+b^2(-b)+c^2(-c)}{abc} \\ &= \frac{-\left(a^3+b^3+c^3\right)}{abc} \\ &= \frac{-3abc}{abc}=-3\end{aligned}$$

해설

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=(\frac{a}{b}+\frac{c}{b})+(\frac{b}{c}+\frac{a}{c})+(\frac{b}{a}+\frac{c}{a})$$

$$=\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+\frac{b+c}{a}$$

$$=\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+\frac{-a}{a}\ (\because\ a+b+c=0)$$

$$=-3$$

26. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$ 의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=b$ 인 이등변삼각형
② $\angle \mathrm{A}=90°$ 인 직각삼각형
③ $b=c$ 인 이등변삼각형
④ $\angle \mathrm{C}=90°$ 인 직각삼각형
⑤ 정삼각형

해설

$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$

$a^2(a+b)+b^2(a+b)-c^2(a+b)=0$

$(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$

$a=-b$ 또는 $c^2=a^2+b^2$

a, b, c 모두 양수이므로, $c^2=a^2+b^2$

$\therefore$ $\angle \mathrm{C}=90°$ 인 직각삼각형

27. 0이 아닌 세수 x, y, z에 대하여 x, y, z중 적어도 하나는 6이고, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$일 때, $2(x+y+z)$의 값을 구하면?

① 6 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

x, y, z중 적어도 하나가 6이므로,

$(x-6)(y-6)(z-6)=0$

$\therefore\ xyz-6(xy+yz+zx)+36(x+y+z)-216=0\ \cdots$①

또, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6},\ \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ 6(xy+yz+zx)=xyz\ \cdots$②

①, ②에서

$36(x+y+z)=216$

$\therefore\ 2(x+y+z)=12$

28. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

④ $a=b$인 이등변삼각형

⑤ $b=c$인 이등변삼각형

해설

$\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$에서

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c)+(a+b+c)(a+b-c)=0$

(좌변)

$=\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}+\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$=(a-b)^2-c^2+(a+b)^2-c^2$

$=a^2-2ab+b^2-c^2+a^2+2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

따라서, $2a^2+2b^2-2c^2=0$이므로 $a^2+b^2=c^2$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

29. $a+b=1$, $a^2+b^2=-1$일 때, $a^{2000}+b^{2006}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a+b=1$에서 $b=1-a$이고 $a^2+b^2=-1$이므로

$a^2+(1-a)^2=-1$, $2a^2-2a+2=0$, $a^2-a+1=0$

이 식의 양변에 $a+1$을 곱하면

$(a+1)(a^2-a+1)=0$, $a^3+1=0$

같은 방법으로 하면

$b^3+1=0$이므로 $a^3=-1$, $b^3=-1$

$$\begin{aligned}\therefore a^{2000}+b^{2006}&=(a^3)^{666}\cdot a^2+(b^3)^{668}\cdot b^2\\&=a^2+b^2=-1\end{aligned}$$

30. 다음 중에서 $2x^3-(4a+3)x^2+2(3a-1)x+4a$의 인수인 것은?

① $2x+1$　② $x+2$　③ $x+2a$

④ $x+a$　⑤ $2x-1$

해설

$$2x^3-(4a+3)x^2+2(3a-1)x+4a$$
$$=2x^3-4ax^2-3x^2+6ax-2x+4a$$
$$=(2x^3-3x^2-2x)-2a(2x^2-3x-2)$$
$$=x(2x^2-3x-2)-2a(2x^2-3x-2)$$
$$=(2x^3-3x-2)(x-2a)$$
$$=(x-2a)(2x+1)(x-2)$$

31. $10^{20}-4$ 과 $10^{30}-8$ 의 최대공약수는 몇 자리의 자연수인가?

① 10자리 ② 11자리 ③ 12자리

④ 13자리 ⑤ 14자리

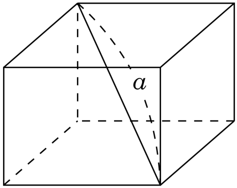
해설

$$10^{20}-4=(10^{10})^2-2^2$$
$$=\left(10^{10}-2\right)\left(10^{10}+2\right)$$
$$10^{30}-8=(10^{10})^3-2^3$$
$$=\left(10^{10}-2\right)\left(10^{20}+10^{10}\times 2+4\right)$$

$\therefore$ 최대 공약수는 $2\left(10^{10}-2\right)=2\cdot 10^{10}-4$

$\therefore$ 11자리수

32. 다음 그림과 같은 직육면체에서 대각선의 길이가 a이고, 모든 모서리의 길이의 합이 b일 때, 이 직육면체의 겉넓이는?



① $\frac{1}{16}b^2 - a^2$　② $\frac{1}{8}b^2 - a^2$　③ $\frac{1}{4}b^2 - a^2$

④ $\frac{1}{8}b^2 + a^2$　⑤ $\frac{1}{16}b^2 + a^2$

해설

가로, 세로의 길이와 높이를 각각 x, y, z라 하면

$4(x+y+z) = b,\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = a$

$\therefore\ x+y+z = \frac{1}{4}b,\ x^2+y^2+z^2 = a^2$

따라서, 구하는 직육면체의 겉넓이는

$$\begin{aligned} 2(xy+yz+zx) &= (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2) \\ &= \left(\frac{1}{4}b\right)^2 - a^2 \\ &= \frac{1}{16}b^2 - a^2 \end{aligned}$$

33. x에 관한 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여, $(x+1)f(x) = (x-1)g(x)$일 때, 다음 중 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는?

① $(x-1)g(x)$ ② $(x+1)g(x)$ ③ $(x-1)^2g(x)$

④ $(x+1)^2g(x)$ ⑤ $(x-1)^3g(x)$

해설

$(x+1)f(x) = (x-1)g(x) \cdots$ ①

$x+1$과 $x-1$이 서로 소이므로

$x+1$은 $g(x)$의 인수이다.

따라서 $g(x) = (x+1)h(x) \cdots$ ② 로 놓으면

①에서 $f(x) = (x-1)h(x) \cdots$ ③

②와 ③에서 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는

$(x-1)(x+1)h(x)$ 즉, $(x-1)g(x)$

34. 두 다항식 $f(x)=(x-1)(x+1)(x+2)$, $g(x)=2x^3-(a+2)x^2-ax+2a$ 의 최대공약수가 이차식이다. 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

해설

$g(1)=0$이므로 $g(x)$는 $x-1$를 인수로 갖는다. 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -(a+2) & -a & 2a \\ & & 2 & -a & -2a \\ \hline & 2 & -a & -2a & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x)=(x-1)(2x^2-ax-2a)$

$f(x)=(x-1)(x+1)(x+2)$이므로

최대공약수는 $(x-1)(x+1)$ 또는 $(x-1)(x+2)$

i) $(x-1)(x+1)$ 일 때

$2(-1)^2-a(-1)-2a=0$에서 $a=2$

$\therefore\ g(x)=2(x-1)(x+1)(x-2)$

ii) $(x-1)(x+2)$ 일 때

$2(-1)^2-a(-2)-2a=0 - 8\neq 0$

i) , ii) 에서

$g(x)=2(x-1)(x+1)(x-2)$이고 $a=2$

35. 두 다항식 $x^2+ax+bc$ 와 $x^2+bx+ca$가 일차의 최대공약수를 가질 때, 최소공배수를 구하면?

① $(x-a)(x-b)(x-c)$ ② $(a-x)(b-x)(c-x)$

③ $(x-a)^2(x-b)(x-c)$ ④ $(x-a)(x-b)^2(x-c)$

⑤ $(x-a)(x-b)(x-c)^2$

해설

일차의 최대공약수를 $x-p$라 하면

$p^2+ap+bc=0\cdots$ ㉠

$p^2+bp+ca=0\cdots$ ㉡

㉠−㉡에서 $(a-b)p-c(a-b)=(a-b)(p-c)=0$

일차의 최대공약수를 가지므로

$a\neq b,\ p=c$이고 최대공약수는 $x-c$

상수항을 기준으로 인수분해하면 각각

$x^2+ax+bc=(x-c)(x-b)$

$x^2+bx+ca=(x-c)(x-a)$

$\therefore$ 최소공배수는 $(x-a)(x-b)(x-c)$

36. 다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 + px + q$를 다항식$g(x) = -x^3 + 2x + q$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 하고, $g(x)$ 와 $R(x)$가 $x-1$만을 공통인수로 가질 때, $f(-1)+g(2)$의 값을 구하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$에서
$f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수는 $g(x)$와 $R(x)$ 의 최대공약수
$g(x)$ 와 $R(x)$ 의 공통인수가 $x-1$ 이므로
$g(x)$ 와 $R(x)$ 의 최대공약수가 $x-1$
$\therefore$ $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수가 $x-1$이다.
$f(1) = 3 + p + q = 0 \quad \therefore \ p + q = -3$
$g(1) = 1 + q = 0 \quad \therefore \ q = -1 \quad \therefore \ p = -2$
$\therefore \ f(x) = x^3+2x^2-2x-1, \ g(x) = -x^3+2x-1 \ \therefore \ f(-1)+g(2) =$
$2-5=-3$