1. 이차방정식 $2[x]^2 + 3[x] + 1 = 0$의 해를 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-1 \leq x < 0$　② $-1 \leq x < 1$　③ $-1 \leq x < 2$
④ $0 \leq x < 1$　⑤ $0 \leq x < 2$

해설

$2[x]^2 + 3[x] + 1 = ([x] + 1)(2[x] + 1) = 0$이므로

$[x] = -1$ 또는 $[x] = -\frac{1}{2}$

그런데 $[x]$은 정수이므로 $[x] = -1$

$\therefore -1 \leq x < 0$

2. 이차방정식 $x^2 + ax + 2b = 0$의 한 근이 $2 + ai$일 때 실수 a, b의 합 $a + b$의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -9　　② -5　　③ 3　　④ 6　　⑤ 12

해설

한 근이 $2 + ai$이므로 다른 한 근은 $2 - ai$이다.
$\therefore$두 근의 합 $-a = 4$ $\quad \therefore a = -4$
두 근의 곱 $(2 - 4i)(2 + 4i) = 4 + 16 = 2b$
$\therefore b = 10$
$\therefore a + b = 10 - 4 = 6$

3. x에 관한 이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가질 때 $x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$의 근을 판별하면?

① 중근　　② 한 실근과 한 허근

③ 서로 다른 두 실근　　④ 서로 같은 두 실근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가지려면

$D' = 4+a-b=0$

$\therefore b=a+4$

$x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$

$x^2-2(a-1)x+a^2-2a+16=0$

$D' = (a-1)^2-(a^2-2a+16)=-15<0$

$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

4. a가 실수일 때, $f(x)=x^2+2(a+1)x+a^2$, $g(x)=x^2+2ax+(a-1)^2$에 대하여 x에 대한 두 이차방정식 $f(x)=0, g(x)=0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① $f(x)=0$이 실근을 가지면 $g(x)=0$도 실근을 가진다.

② $f(x)=0$이 실근을 가지면 $g(x)=0$은 허근을 가진다.

③ $f(x)=0$이 허근을 가지면 $g(x)=0$도 허근을 가진다.

④ $g(x)=0$이 실근을 가지면 $f(x)=0$은 허근을 가진다.

⑤ $g(x)=0$이 허근을 가지면 $f(x)=0$은 실근을 가진다.

해설

방정식 $f(x)=0$과 $g(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\frac{D_1}{4}=(a+1)^2-a^2=2a+1$,

$\frac{D_2}{4}=a^2-(a-1)^2=2a-1$

모든 실수 a에 대하여

$2a+1>2a-1$,

즉, $D_1>D_2$이므로 $D_1<0$이면 $D_2<0$

5. x의 이차방정식 $x^2-(2a+2+m)x+a^2+4a-n=0$이 a의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 상수 m, n을 정할 때, $m+n$의 값은?

① -3　② -2　③ 1　④ 3　⑤ 4

해설

$D=(2a+2+m)^2-4(a^2+4a-n)=0$

이 등식을 a에 관하여 정리하면

$4a(m-2)+m^2+4m+4n+4=0$

이 등식이 a에 관계없이 항상 성립하려면

$4(m-2)=0,\ m^2+4m+4n+4=0$

$\therefore\ m=2,\ n=-4$　　$\therefore\ m+n=-2$

6. $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다.
$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$을 간단히 하면?

① $1+i$　② $1-i$　③ $2+i$
④ $2-i$　⑤ $\sqrt{3}+i$

해설

$\alpha = a+bi,\ \alpha^t = b+ai$이므로
$\alpha\alpha^t = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$
그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a+bi$에서
$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$　$\therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\right)i = i$
$\therefore$ (준식)$= 2\alpha(\alpha\cdot\alpha^t)^4 = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\cdot i^4 = \sqrt{3}+i$

7. n이 짝수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$의 값은?

① -2 ② $-\sqrt{2}$ ③ 0 ④ 2 ⑤ $\sqrt{2}$

해설

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$$

$$=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\left\{\left(\frac{1-\pi}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{2n}\cdot\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=(\pi^2)^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\{(-\pi)^2\}^{2n}-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

8. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

ㄱ $\alpha+\overline{\alpha}$ 는 실수이다.

ㄴ $\alpha-\overline{\alpha}$ 는 허수이다.

ㄷ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.

ㄹ $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ 이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄹ

해설

$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di\ (a,\ b,\ c,\ d$ 는 실수$)$라 하면

ㄱ $\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)

$\therefore$ 참

ㄴ α 가 실수이면 $\alpha=\overline{\alpha}$ 이므로 $\alpha-\overline{\alpha}=0$ 이다.

따라서 $\alpha-\overline{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

ㄷ $i^2=-1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

$\therefore$ 거짓

ㄹ $$\begin{aligned}\overline{\alpha+\beta}&=\overline{(a+c)+(b+d)i}\\&=(a+c)-(b+d)i\\&=(a-bi)+(c-di)\\&=\overline{\alpha}+\overline{\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta}&=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}\\&=(ac-bd)-(ad+bc)i\\&=(a-bi)(c-di)\\&=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}\end{aligned}$$

$\therefore$ 참

9. $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{8}$ 값을 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 1

④ 0 ⑤ -1

해설

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \Rightarrow \omega^3=1$

$(\omega^3)^3\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

10. 방정식 $x^2+x+2=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a \neq 0)$에 대하여 $f(\omega)=3\omega$를 만족한다. 이 때, 실수 a, b의 합은?

① 12　② -12　③ 15　④ -15　⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore\ \omega^2=-\omega-2$

$f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$

$\quad\quad =(b-a)\omega+(12-2a)$

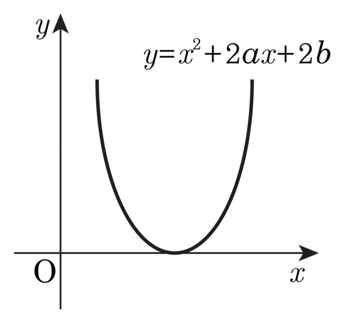
$f(\omega)=3\omega$이므로

$(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$

$b-a=3,\ 12-2a=0$ ($\because$ ω는 허수)

$\therefore\ a=6,\ b=9$

11. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.

② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.

⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\dfrac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b-1)^2 - 1 < 0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

12. $x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{8}{49}$　　② $\frac{49}{8}$　　③ 49　　④ 8　　⑤ 0

해설

$x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$를 x에 대해 정리하면
$x^2 + 5yx + ay^2 + y - 2$
이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.
$D = (25 - 4a)y^2 - 4y + 8$
$\frac{D'}{4} = 4 - 8(25 - 4a) = 0,$
$4 - 200 + 32a = 0$
$\therefore \ a = \frac{49}{8}$

13. 방정식 $3x^2+5x-2=0$의 두 근을 α, β라 하고 방정식 $5x^2+4x+3=0$의 두 근을 γ, δ 라 할 때, $\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\delta\beta}+\frac{1}{\delta\alpha}$ 의 값은?

① $-\frac{10}{3}$　② $-\frac{7}{3}$　③ $-\frac{4}{3}$　④ $-\frac{1}{3}$　⑤ 1

해설

$\alpha+\beta=-\frac{5}{3},\ \alpha\beta=-\frac{2}{3}\ ,\ \gamma+\delta=-\frac{4}{5},\ \gamma\delta=\frac{3}{5}$

$$\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\delta\beta}+\frac{1}{\delta\alpha}$$
$$=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\right)$$
$$=\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)\left(\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}\right)$$
$$=\frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{2}{3}}\times\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{10}{3}$$

14. x의 이차방정식 $x^2-3px+4q-2=0$의 두 실근의 비가 $1:2$가 되도록 하는 실수 $p,\ q$에 대하여 q의 값의 범위는? (단, $p \neq 0$)

① $q \geq -\frac{1}{3}$ ② $q > \frac{1}{2}$ ③ $q \geq \frac{1}{2}$
④ $q > -\frac{1}{2}$ ⑤ $q \geq \frac{2}{3}$

해설

두 근을 $\alpha,\ 2\alpha$라 하면
$\alpha+2\alpha=3p\ \therefore\ \alpha=p$
$\alpha\cdot 2\alpha=4q-2\ \therefore\ \alpha^2=2q-1$
따라서 $p^2=2q-1$
한편 $\mathrm{D}>0$에서 $9p^2-4(4q-2)>0$
$9(2q-1)-16q+8>0$
$2q-1>0$
$\therefore\ q>\frac{1}{2}$

15. x에 대한 이차방정식 $x^2+2kx+6k=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^2+\overline{\omega}^2=16$이다. 실수 k의 값은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

방정식 $x^2+2kx+6k=0$ 이 허근을 가지므로

$\frac{D}{4}=k^2-6k<0,\quad k(k-6)<0$

$\therefore\ 0<k<6$

한편, ω 가 허근이고 계수가 실수이므로 주어진 이차방정식의 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-2k,\ \omega\overline{\omega}=6k$ 이므로

$\omega^2+\overline{\omega}^2=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}=(-2k)^2-12k$

$=4k^2-12k$

$4k^2-12k=16,$

즉, $k^2-3k-4=0$ 에서

$(k+1)(k-4)=0 \qquad \therefore\ k=-1$ 또는 $k=4$

$0<k<6$ 이므로 $k=4$